ELEMENTOS

DE

ARITMÉTICA

AJUSTADOS AL NUEVO PROGRAMA

DE

PRIMER AÑO

DE LOS

COLEGIOS NACIONALES DE LA REPÚBLICA

POR

TEBALDO J. RICALDONI

INGENIERO CIVIL

Profesor de Matemáticas y Física del Colegio Nacional de la Capital

BUENOS AIRES

ANGEL ESTRADA Y CA.—EDITORES

466—CALLE BOLIVAR—466

1897

TRATADO ELEMENTAL

DE

ARITMÉTICA PRÁCTICA

TRATADO ELEMENTAL

DE

ARITMÉTICA PRÁCTICA

AJUSTADO AL NUEVO PROGRAMA

DE LOS

COLEGIOS NACIONALES DE LA REPÚBLICA

POR

TEBALDO J. RICALDONI
INGENIERO CIVIL
Profesor de Matemáticas y Física del Colegio Nacional de la Capital

BUENOS AIRES
ANGEL ESTRADA Y CA.—EDITORES
466—CALLE BOLIVAR—466
1896

IMPRENTA DE JUAN A. ALSINA, MÉXICO 1422

ARITMÉTICA.

CAPÍTULO I.

NOCIONES PRELIMINARES.

1. *Llámase* **Aritmética**, *la parte de las matemáticas que trata de los números.*

El *objeto* de la **Arimética** es:

1.º Estudiar la formación de los *Números (Numeración).*

2.º Enseñar á *expresar* los números por medio de la palabra *(Numeración oral).*

3.º Enseñar á *escribir* los números de una manera rápida, por medio de signos convencionales *(Numeración escrita).*

4.º Estudiar sus *relaciones y propiedades*, estableciendo reglas ciertas y fijas para efectuar las diversas operaciones que se nos presenten *(Cálculo).*

2. **Cantidad matemática**, (*) ó simplemente *cantidad*,

(*) Creemos que así debe llamarse con más propiedad, puesto que hay tambien otras cantidades que escapan al estudio de las matemáticas, como ser: el ódio, dolor, etc. que son suceptibles de aumento ó diminución, y que sin embargo, es imposible medir ó expresar en números.

es todo lo que se concibe como compuesto de partes y divisible en ellas; así, por ejemplo: *cuatro hombres, tres árboles, un ejército*, etc., son cantidades.

3. Unidad, es la cantidad *conocida*, elejida para servir de término de comparación entre cantidades de la *misma especie*, como: *un* hombre, *un* peso *un* metro, etc.

4. Número, es la cantidad *definida* que se obtiene *comparando* la unidad con otra cantidad indefinida de la misma especie. Así, por ejemplo, hablando de un *monte* (cantidad indefinida) podríamos decir que tiene mil *árboles*, siendo entonces *un árbol*, la cantidad definida y de la misma especie.

5. Para fijar la ideas de **cantidad**, **unidad** y **número**, tomaremos dos ejemplos al azar:

1.° Si dijéramos, *la Biblioteca tiene mil libros*, tendríamos las tres expresiones:

Biblioteca.........	*Cantidad*,
Libro	*Unidad*,
Mil..............	*Número*.

2.° Hablando de la *tonelada*, podríamos decir: *la tonelada métrica tiene mil kilógramos*, luego,

Tonelada métrica.	*Cantidad*,
Kilogramo.... ...	*Unidad*,
Mil..............	*Número*.

Clasificación de los números.

6. El número, respecto á su *significación*, puede ser *abstracto* y *concreto*.

Abstracto, es el número que no determina la especie de la unidad, como *tres, cuatro, ocho, etc.*

Concreto, es el número que determina la especie de la unidad, como: *tres hombres, cuatro libros, ocho árboles*, etc.

7. Respecto á su *especie*, los números pueden ser *homogéneos y heterogéneos*

Homogéneo son los números de la misma especie, como dos *hombres*, cinco *hombres*, veinte *hombres*.

Heterogéneos son los números de distinta especie, como, tres *libros*, seis *plumas*, cuatro *pesos*, etc.

8. Respecto á las partes de que se compone, el número puede ser *entero, quebrado y mixto.*

Número entero, es el que se compone de *unidades* que no se refieran á otra unidad superior como ser: *cinco* niños, *dos* plumas, etc.

Número quebrado, es el que consta de *una ó varias* partes iguales de la unidad á que nos referimos, por ejemplo *dos tercios* de vara (dos pies), *cuatro quintos* de arroba (veinte libras), etc. (*)

Número mixto, es aquel que se compone de un *número entero* y *un quebrado*, como *dos* y *tres cuartos, tres libros* y *un quinto*, etc.

* Se observa, por los ejemplos anteriores, que los números *dos tercios de vara, cuatro quintos de arroba*, que son quebrados con respecto á la unidad á que nos referimos (*vara* y *arroba*), se convierten en números enteros, si nos referimos á la unidad inferior (pié, libra), pues entonces serían *dos pies, veinte libras.*

Numeración.

9. La **Numeración** es la parte de la Aritmética que estudia la *formación* de los números, y enseña á expresarlos por medio de la palabra y por escrito; por consiguiente, la numeración se divide en *Numeración oral* y *numeración escrita.*

Se llama **Sistema de Numeración**, al conjunto de palabras y signos de que nos valemos para poder *expresar y representar los números.*

Numeración oral.

10. Los números se forman agregando sucesivamente la unidad *á sí misma ó parte de ella*, de igual especie.

Se *enuncian*, los números que resultan de la progresiva agregación de las unidades, con las palabras: *uno. dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho y nueve*, que, con el aumento de otra unidad, forma el número *diez*, ó una **decena.**

11. La agregación progresiva de las decenas, *llamadas también unidades de segundo orden*, da lugar á otros *nueve* números que son:

dos decenas......	*veinte,*
tres decenas.....	*treinta,*
cuatro decenas...	*cuarenta*
cinco decenas.....	*cincuenta*
seis decenas......	*sesenta*
siete decenas.....	*setenta*

ocho decenas.....	*ochenta*
nueve decenas....	*noventa*
diez decenas......	**ciento**

Entre estos números, *veinte, treinta.... ciento,* tomados dos á dos, encuetran colocación otros *nueve* números que se forman agregando á las palabras *veinte, treinta....., ciento,* los nueve primeros números, y así diríamos: *veinte y uno, veinte y dos...* ; *treinta y uno, treinta y dos.*

Se exceptúan de esta regla, los cinco primeros números comprendidos entre diez y veinte, que se nombran, *once (diez y uno), doce (diez y dos), trece (diez y tres), catorce (diez y cuatro), quince (diez y cinco).* De ahí para adelante los números se nombran según la ley establecida, así *diez y seis, diez y siete, diez y ocho, diez y nueve.*

12. Hemos dicho que *diez unidades del segundo orden* ó *diez decenas,* forman un número llamado *ciento,* que viene á constituir la *unidad del tercer orden* ó **centena.**

La progresiva agregación de una centena, viene á formar una nueva serie de *unidades de tercer orden,* que se nombrarán *un ciento, dos cientos, tres cientos,... nueve cientos,* que agregándole una nueva centena formará el número *mil* que constituye la *unidad de cuarto orden* ó **millar.**

Los números *un ciento, cinco cientos, siete cientos* y *nueve cientos,* se ha convenido en nombrarlos

un ciento........	*cien*
cinco cientos.....	*quinientos*
siete cientos.....	*setecientos*
nueve cientos....	*novecientos*

13. Formada así la *unidad de cuarto orden ó millar* por la agregación de diez centenas, formaríamos sucesivamente las unidades de orden superior; agregando *de diez en diez*, las unidades de cada orden inmediato inferior.

Así la unidad de

quinto orden	será..	*diez millares,*
sexto orden	» ..	*cien millares,*
séptimo orden	» ..	*mil millares ó*

un millón, y así sucesiva é ilimitadamente formaríamos las cantidades,

un millón de millones	que se llama...		**billón.**
un millón de billones	»	» ...	**trillón.**
un millón de trillones	»	» ...	**cuatrillón,**

etc., etc.

14. De aquí sacamos la consecuencia de que en este *sistema de numeración*, diez unidades de un orden, forman una unidad del orden inmediato superior; así: *diez unidades* forman una *decena*; *diez decenas* forman una *centena*; *diez centenas* forman un *millar*;.... de donde también resulta que la *base* de este sistema de numeración, es *diez* y de allí explicado el nombre dado de **Sistema de Numeración Decimal**.

Observación. Excusamos indicar cómo se nombran los números intermediarios entre dos unidades de orden sucesivo, lo que haremos al tratar de la numeración escrita.

15. La siguiente tabla muestra el nombre que toman las unidades de distinto orden, hasta los *cuatrillones*.

TABLA DE NUMERACIÓN

Clase	Unidades principales	Unidades secundarias	Órdenes
TRILLONES	8.º período millares	Centenas Id.	24.º Id.
		Decenas Id.	23.º Id.
		Unidades de millares de trillones.	22.º Id.
	7.º período unidades	Centenas Id.	21.º Id.
		Decenas Id.	20.º Id.
		Unidades de *trillones*	19.º Id.
BILLONES	6.º período millares	Centenas Id.	18.º Id.
		Decenas Id.	17.º Id.
		Unidades de millares de billones.	16.º Id.
	5.º período unidades	Centenas Id.	15.º Id.
		Decenas Id.	14.º Id.
		Unidades de *billones*	13.º Id.
MILLONES	4.º período millares	Centenas Id.	12.º Id.
		Decenas Id.	11.º Id.
		Unidades de millares de millones.	10.º Id.
	3er. período unidades	Centenas Id.	9.º Id.
		Decenas Id.	8.º Id.
		Unidades de *millones*	7.º Id.
UNIDADES	2.º período millares	Centenas Id.	6.º Id.
		Decenas Id.	5.º Id.
		Unidades de millares.	4.º Id.
	1er. período unidades	Centenas Id.	3.º Id.
		Decenas Id.	2.º Id.
		Unidades *simples*.	1er. orden

16. La simple inspección de la tabla, nos muestra que hay dos clases de unidades, unas *principales* que son: la *primera, séptima, décima tercera, décima novena*...... de seis en seis, y otras *intermedias* ó *secundarias* que son las restantes y que no ocupan la posición que corresponderia á los órdenes *primero, séptimo, décimo tercero*, etc.

Numeración escrita.

17. El objeto de la *numeración escrita* es, representar ó *escribir* con un corto número de signos y de una manera rápida, todos los números imaginables. Los signos usados para esto son:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	0,
uno	dos	tres	cuatro	cinco	seis	siete	ocho	nueve	cero;

y toman el nombre genérico de *cifras, notas, caracteres* ó *guarismos,* siendo las primeras y últimas denominaciones, las más usuales.

Los primeros nueve números, se llaman *cifras significativas*, porque ellas mismas significan ó representan el número de unidades que indica su nombre. La cifra *cero* (0) es una cifra *auxiliar*, no representa cantidad ó es el *símbolo de carencia de cantidad*.

Estas cifras aisladamente, toman el nombre de *números dígitos* ó *simples* y agrupadas formando números con varias cifras, toman el nombre de *números polidíjitos ó compuestos*.

18. Por la agrupación de estos diez guarismos, podremos obtener cualquier número, por lo cual se ha convenido en asignar á estas cifras *dos valores* distintos; uno *absoluto* y otro *relativo*.

El *valor absoluto,* es el que tiene la cifra tomada aisladamente.

El *valor relativo,* es el que toma la cifra según el *lugar* que ocupa en el número escrito.

19. La convención que se ha hecho para asignar el *valor relativo según el lugar que ocupa la cifra*, ha sido, suponer que un guarismo colocado á la izquierda de otro, toma un valor *diez veces mayor* al que tendría si ocupara la posición del número dado, es decir, *que representa unidades del orden inmediato superior*.

Así, si tuviéramos el guarismo 8 y lo colocáramos á la izquierda el guarismo **5**, tendríamos el número 85, donde 8 no representa ya *unidades simples* sinó unidades de segundo orden, es decir, *decenas*. Si á la izquierda del número 85 colocamos el guarismo 3, tendríamos el número 385; el *tres* representará entonces, unidades del orden inmediato superior á 8 decenas, es decir, representará *centenas*.

De aquí sacamos la regla para leer cualquier número, pués ya sabemos que la primera cifra de la derecha representa *unidades simples;* la segunda *decenas;* la tercera *centenas;* la cuarta *millares*, etc.

Luego, si tuviéramos escrito el número 674, diríamos que ese número contiene *cuatro unidades, siete decenas* y *seis centenas* ó invirtiendo; *seis centenas, siete decenas* y *cuatro unidades*, lo que se leerá *seis cientos, setenta y cuatro unidades.*

Vemos que los números 6 y 7 tienen los dos valores: el *valor absoluto*, porque al leer el número *seis* cientos *setenta*, ya le asignamos su valor significativo *seis* y *siete* y al leer *seis cientos setenta* le asignamos su valor relativo de unidades del tercero y segundo orden.

Para leer el número 3685, diríamos *tres* mil, *seis* cientos *ochenta* y *cinco* unidades.

20. Cuando el número está expresado *por palabras* y deseáramos *escribirlo*, procederíamos de la misma manera.

Sea, por ejemplo, *escribir* el número. *veinticuatro mil, ochocientos cincuenta* y *tres*. Para esto escribiremos *tres* unidades, *cinco* decenas, *ocho* centenas, *cuatro* unidades de millar y *dos* decenas de millar, teniendo

24,853.

Esto es lo que se llama: *traducir* un número, del *lenguage vulgar* al *lenguage aritmético.*

En vez de *empezar* á escribir el número á partir de las unidades, es más cómodo empezar á escribir el número por las cifras de la izquierda, es decir, por las unidades de orden superior y así se tiene la ventaja de representar el número por medio de guarismos, *á medida que se va expresando.*

Así, si quisiéramos escribir el número, *cuarenta y tres millones, seis cientos setenta y ocho mil, dos cientos treinta y cinco* unidades

43678235

empezaríamos por escribir primeramente el 4, después el 3, luego el 6 y así sucesivamente.

21. En caso que al expresarse un número, *faltase la cifra correspondiente á algún órden de los comprendidos* entre el primero y último, al escribirlo *se suplirá* la cifra significativa que falte por el guarismo *cero* (0). Así, por ejemplo, al decir *tres cientos ocho*, veremos que en este número hay *3 centenas* y *8 unidades* faltando la cifra significativa para las decenas, cifra que se reemplazará por un *cero*, escribiéndose por consiguiente, 308.

El número *trescientos mil, cuarenta* y *tres* se escribirá 300.043.

22. Para facilitar la lectura de números compuestos de muchas cifras, se puede proceder de la siguiente manera:

Se empieza por dividir el número dado en periodos de *tres cifras* á partir de la derecha, pudiendo constar el último á la izquierda de dos ó de una sola cifra. Sepárase el *primer* período con una coma, el *segundo* con un 1, el *tercero* con una coma, el *cuarto* con un 2, y así, alternando siempre con la coma y un número progresivo, advirtiendo que los períodos antepuestos á la coma expresan *millares*, al período antepuesto al 1 expresa *millones*, el antepuesto al 2 *billones*, y así sucesivamente,

1er *Ejemplo:*

$$14^{2}\,307,\,843^{1},\,568,\,932,$$

número que se leerá: *catorce billones, trescientos siete mil, ocho cientos cuarenta y tres millones, quinientos sesenta y ocho mil, novecientos treinta y dos unidades.*

2o *Ejemplo:*

$$8^{3}\,030,\,000^{2}\,087,\,000^{1}\,634,\,005$$

número que se leerá: *ocho trillones, treinta mil billones, ochenta y siete mil millones, seis cientos treinta y cuatro mil, cinco unidades.*

Numeración Romana.

23. Además del sistema de numeración decimal, usado por nosotros, se han usado otros sistemas tales como el *binario, quinario, duodecimal, vigecimal*, cuyas *bases* respectivas son 2, 5, 12 y 20.

El uso del sistema *quinario* ha llegado hasta nosotros. Este es el *sistema de numeración Romana*.

Los signos que usaron los romanos para representar los números, son ocho; las *siete letras* siguientes, cuyo *valor* traducimos en nuestro sistema.

Numeración Romana	I,	X,	L,	C,	D,	M
» *Decimal*	1,	5,	10,	100,	500,	1000

y una *línea horizontal* que se coloca sobre cada letra para hacerla *mil veces mayor*. Así por ejemplo:

$\overline{X}$,	representa	10.**000**
$\overline{D}$,	»	500.**000**
$\overline{M}$,	»	1.000.**000**

etc., etc.

Hay que advertir, que los signos I, X, C, M, representan *unidades principales;* y los signos V, L, D, *unidades intermedias ó secundarias.*

24. Para representar los números Romanos se tendrán presente las convenciones siguientes:

1º Todo signo que *representa unidades principales ó intermedias,* colocado despues de otro de mayor valor, se considera sumado con el signo anterior.

2º Todo signo colocado antes de otro de mayor valor se considera *restado* del que le sigue.

3º Ningún signo se repite *cuatro* veces.

4º La línea horizontal que se coloca sobre un signo, lo hace *mil* veces mayor.

EJEMPLOS

II	*representa*	2	CLX	*representa*	160
III	»	3	CXC	»	190
IV	»	4	CC	»	200
VI	»	6	CCC	»	300
IX	»	9	CD	»	400
XI	»	11	DC	»	600
XVII	»	17	CM	»	900
XXV	»	25	MC	»	1100
XXXIV	»	34	MCD	»	1400
XL	»	40	MD	»	1500
LX	»	60	MDC	»	1600
XC	»	90	MCM	»	1900
CX	»	110	MM	»	2000
CXL	»	140	MMM	»	3000
CL	»	150	XCCCXL	»	10340

CAPÍTULO II.

CÁLCULO.

NUMEROS ENTEROS.

NOCIONES PRELIMINARES.

25. Cálculo Aritmético, es el arte de *componer* ó *descomponer* los números, por medio de las cuatro *operaciones fundamentales* que son: *adición*, *sustracción*, *multiplicación* y *división*.

Los signos que indican estas operaciones son: una cruz (+) que se lee *mas*, é indica la *adición;* una raya horizontal (—), que se lee *menos*, é indica la *sustracción;* una cruz inclinada (×), que se lee *multiplicado por*, é indica la *multiplicación;* una raya horizontal entre dos puntos (÷), ó simplemente dos puntos en línea vertical (:), que se lee *dividido por*, é indica la *división;* y por último, dos rayas paralelas y horizontales (=) que se lee *igual á*, que significa igualdad entre dos cantidades ó expresiones.

Operaciones fundamentales sobre números enteros.

Adición.

26. Sumar, *es reunir todas las unidades contenidas en dos ó más números, en uno sólo.*

Los números que se dan para sumar, se llaman *sumandos*, y el resultado de la operación, *suma*. Los sumandos se separan entre sí con el signo +, y su conjunto, se separa del resultado con el signo =.

27. En la adición, pueden presentarse tres casos:

1° Sumar números simples ó *dijitos*:

2° Sumar números compuestos ó *polidijitos*, cuyas sumas parciales de diferente orden no alcanzan á diez.

3° Sumar números cualesquiera.

28. *Primer caso.* Para *sumar números dijitos*, son bastará saber la *tabla* de sumar siguiente:

TABLA DE ADICIÓN

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Para obtener por medio de esta *tabla*, la suma de un número cualquiera de la primera línea, con otro cualquiera de la primera columna, no habrá más que buscar el número que se encuentra en el lugar donde se cruzan la línea y columna correspondiente y este representará la suma.

La operación se dispondrá así:

$$3 + 4 = 7, \text{ ó bien } \begin{array}{r} 3 \\ +\ 4. \\ \hline 7. \end{array}$$

Si se tratara de una suma de varios números dígitos, por ejemplo

$$6 + 7 + 4 + 3 = \mathbf{20},$$

empezaríamos á sumar el 6 con el 7, obteniendo la suma 13, á la cual agregaríamos el sumando 4, dándonos 17 y finalmente agregaríamos el sumando 3, con lo cual tendríamos la *suma* **20**.

29. Observaremos que la suma indicada

$$6 + 7 + 4 + 3,$$

si la escribimos alterando el orden en los sumandos

$$4 + 6 + 3 + 7 = \mathbf{20},$$

nos dá la misma suma 20, lo que se expresa diciendo que: *el orden de los sumandos no altera la suma.*

30. *Segundo caso.* Para sumar números compuestos, *se colocan los sumandos, unos debajo de los otros, de manera que se correspondan, en columna vertical, las unidades del mismo orden*, es decir, las unidades debajo de las unidades; las decenas debajo de las decenas, etc., se tira *una línea horizontal, debajo del último sumando, se suma separadamente cada columna, empezando por las unidades, y escribiendo debajo de ellas el resultado obtenido.*

Así, para sumar

$$123 + 431 + 14 + 201 = 769,$$

se dispondrá la operación como sigue:

$$\left.\begin{array}{r} 123 \\ 431 \\ 14 \\ 201 \end{array}\right\} \textit{sumandos}$$
$$\begin{array}{r} \hline \mathbf{769} \end{array} \ \textit{Suma}$$

31. *Tercer caso.* Rara vez se presentará el caso anterior, siendo el que ahora nos proponemos estudiar, el que se presenta generalmente en los cálculos.

Si quisiéramos sumar

$$1\,873 + 4\,007 + 976 + 3\,058 = 9\,914$$

dispondríamos como antes la operación

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 2\ 2\ \ } \\ 1\,873 \\ 4\,007 \\ 976 \\ 3\,058 \\ \hline 9\,914. \end{array}$$

—Notaremos, que al sumar la columna de las unidades, hemos dicho

$$3 + 7 + 6 + 8 = \mathbf{24},$$

y como en este número hay *cuatro unidades y dos decenas*, colocaremos **4** debajo de la raya, en correspondencia con la columna de las unidades y las *dos* decenas las retenemos mentalmente, para agregarlas á la columna de las decenas, así diríamos

$$\mathbf{2} + 7 + 0 + 7 + 5 = \mathbf{21}$$

21 decenas, que se compone de *dos* centenas y *una* decena; escribiríamos el **1** de la decena, conservando mentalmente las *dos centenas*, para agregarlas á la columna de las centenas y así sucesivamente.

32. En caso de que fueran muchos los sumandos, se facilita la operación dividiéndolos en dos ó tres operaciones de suma y reuniendo luego, en una sóla todas las sumas parciales. Así, si tuviéramos que sumar.

$$3.426 + 876 + 2.345 + 45 + 3.460 + 2.800 + 7.456 + \\ + 1.832 + 565 + 7.005 + 4.302 + 86,$$

dispondríamos la operación, como sigue:

3.426	3.460	565
876	2.800	7.005
2.345	7.456	4.302
45	1.832	86
6.692,	15.548,	11.958,

y luego

$$\left.\begin{array}{r} 6.692 \\ 15.548 \\ 11.958 \end{array}\right\} \textit{Sumas parciales}$$

$$\underline{34.198,} \quad \textit{Suma total}$$

—Podríamos también disponer la operación de la siguiente manera.

$$\left.\begin{array}{rcr} 3.426 & & \\ 876 & & \\ 2.345 & & \\ 45 & = & 6.692 \\ \hline 3.460 & & \\ 2.800 & & \\ 7.456 & & \\ 1.832 & = & 15.548 \\ \hline 565 & & \\ 7.005 & & \\ 4.302 & & \\ 86 & = & 11.958 \end{array}\right\} \textit{Sumas parciales}$$

$$\underline{34.198} \quad \textit{Suma total}$$

33. La *prueba* de la suma, se practica por tres medios distintos.

1º Si al hacer la suma, se han recorrido las columnas de *arriba hacia abajo, se comprueba,* sumando nuevamente de *abajo hacia arriba.*

2º Puede también omitirse el último sumando, y después de hacer la suma parcial de los sumandos restantes, se agrega el sumando que se omitió.

3º El tercer medio, se explicará cuando hayamos estudiado la *sustracción.*

—Estas pruebas, sólo nos darán la *probabilidad* de que la operación está bien hecha, pues se comprende, cuan fácil és, que se reproduzcan los errores cometidos en la operación primitiva.

34. La **suma mental,** se podrá aplicar ó aceptar, cuando los sumandos reunan en su escritura, condiciones especiales que permitan retenerlos con facilidad. Por ejemplo, si tuviéramos que sumar

$$300 + 280 + 110$$

nos sería fácil hacerlo mentalmente diciendo: $3 + 2 + 1 = 6$ *cientos;* $80 + 10 = 90$ y la suma sería **690**.

En cambio, si tuviéramos que sumar

$$675 + 49 + 278,$$

sería posible hacer la suma mentalmente, pero á costa de una verdadera gimnasia de la mente y quedándonos siempre la duda, sobre la exactitud del resultado.

EJERCICIOS.

1º $241 + 302 + 126;$

2º $2.483 + 567 + 3.280 + 4.865;$

3º $\overset{2}{7}003,425\,\overset{1}{6}75,322 + 1.004 + 8 + 300,432$

PROBLEMAS.

1º Juan, Pedro y Carlos se asociaron, poniendo el primero 3.265 $; el segundo 32.865 $ y el tercero 3.406 $ ¿Cuál será el capital social?

2º La distancia entre la Plaza de la Victoria y Flores es de 9.232 metros; entre Flores y Floresta es 2.380 metros y entre Floresta y **Morón** es de 15.456 metros, ¿cuál será la distancia que existe entre la Plaza Victoria y Morón?

3º En el Colegio Nacional hay en la actualidad 328 alumnos de 1er. año; 436 de 2º año; 324 de 3er. año; 334 de 4º año y 158 de 5º año ¿cuál es el número de estudiantes?

Sustracción.

35. *La* **sustracción**, *es la operación contraria á la adición, ó bien, es la operación mediante la cual, se puede averiguar la diferencia existente entre dos números dados.*

Su objeto, enunciado de una manera más precisa, es:

Dada la suma de dos números y uno de los sumandos, determinar el otro sumando.

La suma dada, se llama *minuendo*, el sumando conocido, *sustraendo*, y el sumando buscado se llama *resto, exceso* ó *diferencia.*

El signo que separa el minuendo del sustraendo, es (—) y todo se liga al resultado ó resto con el signo =. Así,

$$25 - 17 = 8$$

que se leerá: 25 *menos* 17, igual á 8.

36. De lo dicho se deduce, que en *Aritmética:*

1º El minuendo es *siempre* mayor que el sustraendo y que la diferencia.

2º *Añadiendo ó quitando* al *minuendo* un número cualquiera, el resto resultará *aumentado ó disminuido* del mismo número.

3º *Añadiendo ó quitando* al *sustraendo* un número cualquiera, el resto resultará *disminuido ó aumentado* del mismo número.

4º Si se aumenta ó disminuye al minuendo y sustraendo un mismo número, el resto *no varía.*

5º Si el minuendo y sustraendo *son iguales*, el resto es *cero.*

6º El resto sumado al sustraendo, *es igual* al minuendo.

37. En la *sustracción* pueden presentarse tres casos:

1º Que el minuendo y sustraendo sean números díjitos, ó díjito el sustraendo y menor que 19 el minuendo.

2º Que el minuendo y sustraendo sean polidíjitos, pero que ninguna cifra del minuendo, sea menor que la correspondiente del sustraendo.

3º Que el minuendo y sustraendo sean polidíjitos cualesquiera.

38. *Primer caso.* Para restar dos números díjitos, ó díjito el sustraendo y menor que 19 el minuendo, bastará la siguiente

TABLA DE SUSTRACCIÓN.

	SUSTRAENDOS									
MINUENDOS	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.
3	3	2	1	.	.	.	.	.	.	.
4	4	3	2	1	.	.	.	.	.	.
5	5	4	3	2	1	.	.	.	.	.
6	6	5	4	3	2	1	.	.	.	.
7	7	6	5	4	3	2	1	.	.	.
8	8	7	6	5	4	3	2	1	.	.
9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	.
10	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
11	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
12	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3
13	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4
14	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5
15	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6
16	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7
17	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8
18	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9

Si se quiere restar 5 de 8, el número que sumado con 5 dá 8 es **3**, y luego

$$8 - 5 = \mathbf{3}.$$

—Si de 17 queremos restar 8, tendríamos

$$17 - 8 = 9.$$

39. *Segundo caso. En caso que el minuendo y sustraendo sean polidíjitos,* pero con la condición de que cada cifra del sustraendo sea menor que la correspondiente del minuendo, bastará colocar el sustraendo debajo del minuendo, de manera que se correspondan las unidades del mismo orden; se traza luego, una raya horizontal debajo del sustraendo y en seguida se resta cada cifra del sustraendo de su correspondiente del minuendo, empezando por la derecha y colocando debajo de la raya, la diferencia así obtenida. Así, para restar

$$8.797 - 2.346 = 6.451$$

dispondríamos la operación como sigue:

$$\begin{array}{rl} 8.797 & \textit{minuendo} \\ -\ 2.346 & \textit{sustraendo} \\ \hline 6.451 & \textit{resto} \end{array}$$

94. *Tercer caso.* Para efectuar la sustracción en el caso en que los dos términos *sean polidijitos cualesquiera*, procederíamos como en el caso anterior, y cuando la cifra del minuendo fuera menor que la correspondiente del sustraendo, se le añadirán 10 unidades de la misma especie, considerando como disminuida de una unidad, la cifra de la columna de orden inmediato superior.

EJEMPLOS

Minuendo	9.876	Unidades.	6 — 3 = 3
Sustraendo. . . .	4.653	Decenas .	7 — 5 = 2
Diferencia	**5.223**	Centenas.	8 — 6 = 2
		Millares .	9 — 4 = 5

Minuendo	6.742	Unidades.	**12** — 9 = 3
Sustraendo. . . .	3.819	Decenas .	3 — 1 = 2
Diferencia	**2.923**	Centenas.	**17** — 8 = 9
		Millares .	5 — 3 = 2

41. Si en el minuendo se encuentran varios ceros sucesivos, se considerará el primero á la derecha como igual á 10 y los demás como iguales á 9, disminuyendo de una unidad á la primera cifra significativa de la izquierda.

EJEMPLOS

Minuendo	8.008	Unidades.	8 − 3 = 5
Sustraendo. . . .	5.433	Decenas .	10 − 3 = 7
Diferencia	**2.575**	Centenas.	9 − 4 = 5
		Millares .	7 − 5 = 2

Minuendo	9.006	Unidades.	**16** − 8 = 8
Sustraendo. . . .	7.348	Decenas .	9 − 4 = 5
Diferencia	**1.658**	Centenas.	9 − 3 = 6
		Millares .	8 − 7 = 1

42. Algunos, prefieren otro método, para efectuar la sustracción y consiste, en *no disminuir* las cifras del minuendo y *aumentar* las del sustraendo, para lo cual se basan en la cuarta propiedad (35) que dice: que *agregando á ambos términos de la sustracción un mismo número, su diferencia no se altera.* Tomando los siguientes ejemplos, la operación se dispondría así:

Minuendo.	8.000	Unidades.	0 − 0 = 0
Sustraendo. . . .	5.430	Decenas .	**10** − 3 = 7
Diferencia	**2.570**	Centenas.	**10** − 5 = 5
		Millares .	8 − **6** = 2

Minuendo	8.134	Unidades.	**14** − 6 = 8
Sustraendo. . . .	7.896	Decenas .	**13** − **10** = 3
Diferencia	**238**	Centenas.	**11** − 9 = 2
		Millares .	8 − **8** = 0

Minuendo	9.006	Unidades.	16 − 8 = 8
Sustraendo. . . .	7.348	Decenas .	10 − 5 = 5
Diferencia	**1.658**	Centenas.	10 − 4 = 6
		Millares .	9 − 8 = 1

43. Algunos, emplen tambien la *sustracción por adición*, basándose en la sexta propiedad (**35**) que dice: que *el resto, sumado con el sustraendo, debe formar el minuendo.*

EJEMPLO

Minuendo	8.756	Unidades.	2 + 4 = 6
Sustraendo	6.342	Decenas .	4 + 1 = 5
Diferencia	2.414	Centenas	3 + 4 = 7
		Millares .	6 + 2 = 8

Como se vé, no hay inconveniente en aplicar este método, cuando se trata del *Segundo caso*, pero tratándose del *tercero*, la operación se complica, y creemos que debe ser desechado.

44. El **Complemento Aritmético** *de un número, es lo que le falta, para valer el número representado por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene el número dado.*

Así, el *complemento aritmético* del número 3.486 que está compuesto de cuatro cifras, será lo que le falta para valer **10.000**. Luego, para determinar el complemento aritmético, nos bastará restar el número dado del número representado por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene el número propuesto. Así tendríamos

$$\begin{array}{r} 10.000 \\ -\ 3.486 \\ \hline \mathbf{6.514} \end{array}$$

que es el complemento aritmético de 3.486.

45. *aplicando el complemento aritmético* podemos explicar un nuevo medio para efectuarla sustracción diciendo:

La diferencia de dos números, es igual á la suma del minuendo con el complemento aritmético del sustraendo, menos, la unidad seguida de tantos ceros, como cifras contiene el sustraendo.

EJEMPLOS

1°

$$\begin{array}{r} 9.763 \\ -\ 8.641 \\ \hline \mathbf{1.122} \end{array}\ \textit{Diferencia} \qquad \begin{array}{r} 10.000 \\ -\ 8.641 \\ \hline 1.359 \end{array}\ \textit{Complemento}$$

$$\begin{array}{lr} \textit{Minuendo} & 9.763 \\ \textit{Complemento} + & 1.359 \\ \hline & 11.122 \\ & -10.000 \\ \hline & \mathbf{1.122} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \textit{Corrección} \\ \\ \textit{Diferencia} \end{array}$$

Igual á la obtenida directamente.

2°

$$\begin{array}{r} 46.832 \\ -\ 31.487 \\ \hline \mathbf{15.345} \end{array}\ \textit{Diferencia} \qquad \begin{array}{r} 100.000 \\ -\ 31.487 \\ \hline 68.513 \end{array}\ \textit{Complemento}$$

$$\begin{array}{lr} \textit{Minuendo} & 46.832 \\ \textit{Complemento} + & 68.513 \\ \hline & 115.345 \\ & -100.000 \\ \hline & \mathbf{15.345} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \textit{Corrección} \\ \\ \textit{Diferencia} \end{array}$$

que es igual á la diferencia obtenida directamente.

46. Como observamos, este método no ofrece ventaja alguna cuando se trata de restar *dos* números, pero la presentará cuando se trate de quitar *la suma* de *varios* números de *la suma* de otros *varios.*

EJEMPLO.

(48.768 + 7065 + 3240) — (28.432 + 4032 + 8650)

Las operaciones se dispondrán como sigue:

48.768		28.432	
7.065		4.032	
3.240		8.650	
59.073	*Minuendo*	41.114	*Sustraendo*

59.073	
41.114	
17.959	*Diferencia*

—*Aplicando* ahora el complemento aritmético, se tendrá

	48.768			
	7.065			
	3.240			
Com.^{to} de 28.432 =	71.568	*Complementado*	á	100.000
» » 4.032 =	5.968	»	»	10.000
» » 8.650 =	1.350	»	»	10.000
	137.959	*Corrección*		120.000
Corrección	120.000			
	17.959			

que es la diferencia buscada.

47. La *prueba* de la sustracción se deduce de la definición misma y consiste:

1º En sumar el resto con el sustraendo, debiendo obtener por resultado el minuendo;

2º Restar la diferencia del minuendo, debiéndose obtener el sustraendo.

EJEMPLO

Minuendo..........	6.742
Sustraendo	3.685
Diferencia.........	3.057

—*Primera* prueba

$$\begin{array}{r} 3.685 \\ +\ 3.057 \\ \hline 6.742 \end{array}$$
6.742, que es el minuendo.

—*Segunda* prueba

$$\begin{array}{r} 6.742 \\ -\ 3.057 \\ \hline 3.685 \end{array}$$
3.685, que es el sustraendo.

48. Conocida ya la sustracción, daremos una prueba de la *Adición*, que consiste en lo siguiente:

Cuando se quiere comprobar la suma obtenida por la adición de varios sumandos, bastará separar con una raya horizontal, el primer ó último sumando y hacer una *nueva suma*, con prescindencia del sumando *tachado*. La nueva suma, así obtenida, se escribirá debajo de la suma que se trata de comprobar y *la diferencia* que se obtenga entre estas, *será igual al sumando separado*, si la operación ha sido bien hecha.

EJEMPLO

```
  74.683
 -------
  25.452
   8.366
   7.205
     483
   2.305
 -------
 118.494 Suma total
  43.811    »   de comprobación
 -------
  74.683 = Sumando separado
```

---

48. Debe tenerse presente que en la *adición* y *sustracción*, sólo se opera con *números homogéneos*, puesto que nunca se podrían sumar, *hombres* con *libros; plumas* con *árboles*, etc.

EJERCICIOS

Efectuar las operaciones siguientes:

88.453 — 74.031;
18.563 — 9.807;
43.621 — 36.874;
90.005 — 31.971;

PROBLEMAS

(Aplicando el Complemento Aritmético)

1º Se desea saber los años que tenía una persona que nació en el año 1793 y murió, el mismo día, del año 1876.

2ª Teniendo un individuo tres bibliotecas conteniendo la 1ª 2.345 volúmenes; la 2ª 1.475; y la 3ª 1845, vendió 3.040 volúmenes á una persona y 765 á otra ¿cuántos volúmenes le quedaron?

3ª Teniendo el ejército argentino, 6.850 soldados de infantería; 3.058 de caballería y 2.456 de artillería, y siendo la guarnición de la Capital de 2.685 soldados de infantería, 1.346 de caballería y 875 de artillería ¿cuántos soldados estarán ocupados en la guarnición del resto de la República?

Multiplicación

49. Multiplicar, *es repetir un número tantas veces por sumando, como unidades contiene otro.* *

De esta definición se deduce; que *la multiplicación no es más que un caso particular de la suma*, en que todos los sumandos son iguales, y que ella nos enseña á efectuar esas sumas particulares de una manera rápida y abreviada.

El número que *debe repetirse como sumando*, se llama *multiplicando*; el que determina *las veces* que debe repetirse como sumando, se llama *multiplicador*; y el *resultado* de la operación ó suma total, se llama *producto*. El multiplicando y multiplicador, se llaman *factores del producto*.

50. Si tuviéramos, por ejemplo, que multiplicar 4 por 3, estos números 4 y 3 son los *factores* del pro-

---

* Hemos adoptado esta definición teniendo presente que á esta altura el estudiante sólo conoce l s dos operaciones, *adición* y *sustracción* de números enteros.

Una definición más correcta sería:

Hallar el producto de dos números, es determinar un tercero que sea respecto á uno de ellos, lo que el otro es respecto á la unidad.

ducto y el resultado de la operación 12, será el *producto.*

51. De la definición de la multiplicación resultan las siguientes *Propiedades:*

1ª *Si el multiplicador es la unidad, el producto es igual al multiplicando.*

2ª *Si el multiplicador es cero, el producto será tambien cero.*

52. En la multiplicación pueden suceder tres casos:

1º *Multiplicar un dígito por otro;*

2º *Multiplicar un polidígito por un dígito;*

3º *Multiplicar un polidígito por otro polidígito.*

53. *Primer caso.*—Para multiplicar un dígito por otro dígito bastará conocer la tabla de multiplicación que se acompaña:

TABLA DE MULTIPLICACIÓN

(Tabla de Pitágoras)

	MULTIPLICANDOS								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
MULTIPLICADORES	2	4	6	8	10	12	14	16	18
	3	6	9	12	15	18	21	24	27
	4	8	12	16	20	24	28	32	36
	5	10	15	20	25	30	35	40	45
	6	12	18	24	30	36	42	48	54
	7	14	21	28	35	42	49	56	63
	8	16	24	32	40	48	56	64	72
	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Esta *se forma* de una manera bien fácil, pues escritos los números dígitos en la *primera línea y primera columna*, bastará conocer la operación de sumar, para llenar el cuadro.

El *modo de usar* la tabla es muy sencillo. Si quisiéramos, por ejemplo, conocer el producto de 6×7, bastará buscar el número 6 en la *primera línea* y recorrer la columna correspondiente á este número, hasta llegar á la línea que corresponde al número 7 de los multiplicadores; y el número **42** á que se llega, *es el producto* buscado.

54. *Segundo caso.—Para multiplicar un número polidígito por otro dígito, bastará multiplicar, empezando por las unidades, cada una de las cifras del polidígito (multiplicando) por el dígito (multiplicador) y escribir el producto debajo de una raya horizontal de modo que se correspondan las unidades de mismo orden con las del multiplicando.*

1er. Ejemplo.—Multiplicar 324 por 2. La operación se dispondrá así,

$$\begin{array}{r} 324 \\ \times 2 \\ \hline 648 \\ \hline \end{array}$$

diciendo $2 \times 4 = 8$; $2 \times 2 = 4$; $2 \times 3 = 6$.

—En el caso de que al multiplicar el dígito por cada una de las cifras del multiplicador, resultara un número compuesto de *dos cifras*, se escribirá unicamente la cifra que expresa unidades inferiores, reservando mentalmente la otra cifra, para agregarla al producto del multiplicador por la cifra subsiguiente.

Por ejemplo, si quisiéramos multiplicar 2346 por 8, procederíamos así:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 2 & 3 & 4 & 6 \\
 & & & \times & 8 \\
\hline
 & 16 & 24 & 32 & 48 \\
 & +2 & +3 & +4 & \\
 & \text{—} & \text{—} & \text{—} & \\
 & 18 & 27 & 36 & \\
1 & 8 & 7 & 6 & 8
\end{array}
$$

Así, diríamos:

$8 \times 6 = 48$, escribiendo bajo la raya **8** y reservando las 4 decenas para agregarlas al producto siguiente;

$8 \times 4 = 32$, $32 + 4 = 36$, escribiendo el **6** y reservando el 3;

$8 \times 3 = 24$, $24 + 3 = 27$, escribiendo **7** y reservando el 2;

$8 \times 2 = 16$, $16 + 2 = 18$, que se escribirá por completo.

—En la práctica, se escribe directamente el producto debajo de la raya horizontal, haciendo mentalmente las operaciones de suma. Así, el ejemplo anterior sería

$$
\begin{array}{r}
2346 \\
\times\ 8 \\
\hline
18768 \\
\hline
\end{array}
$$

55. *Tercer caso.— Para multiplicar un polidígito por otro polidígito, bastará multiplicar todo el multiplicando por cada cifra del multiplicador, empezando por la derecha y teniendo cuidado de colocar la primera cifra del segundo producto parcial debajo de las decenas del primer producto; la primera cifra del tercer producto parcial, debajo de las centenas* y así sucesivamente.

Por ejemplo, *multiplicar* 2385 por 763. La operación se dispondrá así:

2385	*Multiplicando*
× 763	*Multiplicador*
7155 14310 16695	*Productos parciales*
1819755	*Producto total*

56. Si tuviéramos que multiplicar 7.634 por 605, se tendría

$$
\begin{array}{r}
7634 \\
\times\ 605 \\
\hline
38170 \\
0000 \\
45804 \\
\hline
4618570
\end{array}
$$

—Como se observará, el segundo producto parcial está formado de *ceros* y este segundo producto debe suprimirse en la práctica, teniendo cuidado de poner la primera cifra del tercer producto parcial, debajo de las unidades de tercer orden, así:

$$
\begin{array}{r}
7634 \\
\times\ 605 \\
\hline
38170 \\
45804 \\
\hline
4618570
\end{array}
$$

—Si tuviéramos que multiplicar 3658 por 2007, tendríamos

```
   3658
   2007
  -----
  25606
7316
-------
7341606
```

57. De todo lo expuesto se deducen las siguientes:

Propiedades de la Multiplicación.*

I.

El orden de los factores no altera el producto, así

$$3 \times 4 = 4 \times 3,$$

$$161 \times 35 = 35 \times 161$$

II.

El producto de varios factores se forma, multiplicando dos cualesquiera de ellos, el producto así obtenido por otro de los factores, y así sucesivamente hasta multiplicar por el último factor.

Es decir

$$4 \times 3 \times 8 \times 7 = \mathbf{12} \times 8 \times 7,$$

$$12 \times 8 \times 7 = \mathbf{96} \times 7,$$

$96 \times 7 = \mathbf{672}$ que es el producto buscado.

* La demostración de estos y otros problemas son del resorte de la Aritmética Razonada.

III.

Para multiplicar un producto, por un número, bastará multiplicar uno cualquiera de los factores del producto, por dicho número.

Así, para multiplicar por 5, *el producto*

$$672 = 4 \times 3 \times 8 \times 7,$$

bastará multiplicar por 5, uno cualquiera de los factores 4, 3, 8 ó 7, es decir

$$672 \times \mathbf{5} = 4 \times 3 \times 8 \times 7 \times \mathbf{5} = 4 \times 3 \times 8 \times \mathbf{35} = 3360$$

IV.

Para multiplicar un número cualquiera por la unidad seguida de ceros, bastará escribir á la derecha del número dado, tantos ceros como tiene el multiplicador.

Así,
$$365 \times 100 = 365\mathbf{00}$$
$$267 \times 1000 = 267\mathbf{000}$$

V.

Para multiplicar números que terminen en ceros, se prescinde de ellos y se multiplican las cifras significativas que queden, agregando á este producto los ceros que se dejaron.

Así, para multiplicar 376 por 800, haríamos:

$$\begin{array}{r} 376 \\ \times\ 8 \\ \hline 3008, \end{array}$$

agregando á la derecha de este resultado, los *dos ceros* de que prescindimos, escribiendo

300**800**

que será el producto buscado.

—Análogamente, para formar el producto de 42600 por 3200, multiplicaríamos

$$\begin{array}{r} 426 \\ \times\ 32 \\ \hline 852 \\ 1278 \\ \hline 13632 \end{array}$$

y á este producto le agregaremos *cuatro ceros*. Luego **136.320.000** será el producto buscado.

VI.

Para multiplicar una suma por un número, se multiplica cada uno de los sumandos, por dicho número y la suma de los productos parciales, dará el producto total.

Así para multiplicar la suma $3 + 5 + 8$ por el númere 6, procederíamos como sigue:

$$\begin{array}{r} 3 \times 6 = 18, \\ 5 \times 6 = 30, \\ 8 \times 6 = 48, \\ \hline \end{array}$$

96 *producto total.*

En efecto:

$$(3 + 5 + 8) \times 6 = \mathbf{16} \times 6 = \mathbf{96}.$$

y también $3 \times 6 + 5 \times 6 + 8 \times 6 = 18 + 30 + 48 = \mathbf{96}.$

VII.

El producto de la diferencia de dos números, por un tercero, es igual á la diferencia de los productos del minuendo y sustraendo, por el mismo número.

En efecto, siendo $9 - 6$ la diferencia que se ha de multiplicar por el número 4, se tendrá

$(9 - 6) \times 4 = 3 \times 4 = \mathbf{12}$, y aplicando la regla

$$(9 - 6) \times 4 = 9 \times 4 - 6 \times 4 = 36 - 24 = \mathbf{12}.$$

VIII.

El producto de los números tiene tantas cifras como hay en ambos factores, ó una menos.

Así el producto de los números 365 por 243 *deberá tener* 6 ó 5 cifras.

$$\begin{array}{r}
365 \\
243 \\
\hline
1095 \\
1460 \\
730 \\
\hline
88695
\end{array}$$
con **5** *cifras.*

58. El producto de un número por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ó 100, viene á ser lo que se dice: *duplo*, *triplo*, *cuádruplo*, *quíntuplo*, *séxtuplo*, *séptuplo*, *óctuplo*, *nónuplo*, *décuplo*, ó *céntuplo* del número primitivo.

— Así, 20 es el *cuádruplo* de 4, porque $5 \times \mathbf{4} = 20$; 800 es el *céntuplo* de 8, porque $8 \times \mathbf{100} = 800$.

Ejercicios

Multiplicar:

231×3;
8673×8;
15621×365;
3468×803;
87324×3400;
68000×1700;
67348×2008;

Problemas

1° Si un tren recorre 896 metros por minuto ¿cuántos recorrerá en 328 minutos si conserva la misma velocidad?

2° ¿Cuánto importarán 6.785 hectáreas de terreno á 420 $ la hectárea?

3° Se han comprado 3.765 vacas á 18 $ una; 2.300 ovejas á 10 $ y 735 caballos á 30 $. Se vendieron: las vacas á 27 $; las ovejas á 7 $ y los caballos á 32 $. ¿Cuál será la ganancia ó pérdida realizada en esta operación?

División.

59. *Dividir un número, es averiguar cuantas veces contiene á otro.*

Suele definirse también diciendo:

Dividir, es la operación mediante la cual, dado un número formado por el producto de dos factores y uno de ellos, se quiere determinar el otro factor.

El número que se trata de dividir, se llama *dividendo*, el factor conocido *divisor* y el que se busca *cociente*.

60. Si quisiéramos, por ejemplo, dividir 18 por 6, veríamos que el 18 contiene al 6, 3 veces y luego diríamos que el *cociente* es 3.

Podríamos ver que el 6 está 3 veces contenido en el número 18, haciendo una serie sucesiva de sustracciones, así

	18	*Dividendo*
1.ª	— 6	*Divisor*
	12	
2.ª	— 6	*id.*
	6	
3.ª	— 6	*id.*
Sustracciones 3	0.	

—De esto se deduce, que así como la *multiplicación* no es más que una *suma* abreviada; *la división no es más que una sustracción abreviada.*

61. Sea dividir un número 23 por el número 6, tendríamos

	23	*Dividendo*
1.ª	— 6	*Divisor*
	17	
2.ª	— 6	*id.*
	11	
3.ª	— 6	*id.*
Sustracciones 3	5.	

en cuyo caso observaremos que el 6 está contenido 3 veces, dejando un *excedente* de 5 unidades. Esto nos dice; que el cociente está comprendido entre 3 y 4.

En el caso (60) en que el divisor está contenido en el dividendo un número *exacto* de veces, se dice que la división es *exacta*; y cuando, como en el caso presente queda un *sobrante*, se dice que la división es *inexacta*, tomando el sobrante el nombre de *residuo*.

—La operación de la división puede indicarse de la siguiente manera.

$$18 : 6 = 3, \text{ ó bien } \frac{18}{6} = 3.$$

62. De lo dicho anteriormente se deducen las siguientes

Propiedades de la División.

1ª *Dividiendo un número por sí mismo, dará por cociente la unidad.*

2ª *Dividiendo un número por la unidad, se obtendrá por cociente, el mismo número.*

3ª *Dividiendo cero por un número cualquiera se obtendrá cero por cociente.*

4ª *Si el dividendo es mayor ó menor que el divisor, el cociente será mayor ó menor que la unidad.*

5ª *El dividendo será igual al producto del cociente por el divisor, más el residuo si lo hubiere.*

63. En la división pueden presentarse tres casos:

1º *Dividir un número, por nn número dígito siendo dígito el cociente.*

2º *Dividir un número polidígito por otro, siendo dígito el cociente.*

3º *Dividir un número polidigito, por otro siendo polidigito el cociente.*

64. *Primer caso.* – Este caso puede resolverse fácilmente, por medio de la tabla de dividir, con tal que la división sea exacta.

Así, si se quiere dividir 42 por 7 bastará buscar en la primera columna el número 7; recorrer la línea que corresponde á este número hasta llegar al número 42 y subir por la columna de este número, encontrando en su estremo el número 6, que será el cociente buscado. Luego,

$$42 : 7 = 6.$$

65. Si se tuviera que dividir 45 por 7, haríamos lo mismo. Partiendo del número 7 de la primera columna, recorreríamos la línea de este número y veríamos que el número 45 debe encontrarse entre los 42 y 49 de la tabla que corresponde á los cocientes 6 y 7; luega el cociente buscado se encontrará también comprendido entre estos números, es decir, será mayor que 6 y menor que 7, y la división será *inexacta.*

El cociente *entero* sería 6 y el residuo se obtendría restando 42 de 45. La operación se dispondrá así:

Dividendo	45	7	*divisor*
Producto de 6 × 7	— 42	6	*cociente*
	3		*residuo*

—A continuación insertamos una tabla que enseña á dividir los números comprendidos entre 1 y 89, por los números dígitos, dando los *cocientes* y *residuos* correspondientes.

Tabla de división.

DIVISORES	DIVIDENDOS									RESIDUOS
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	0
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	1
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	0
	4	7	10	13	16	19	22	25	28	1
	5	8	11	14	17	20	23	26	29	2
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	0
	5	9	13	17	21	25	29	33	37	1
	6	10	14	18	22	26	30	34	38	2
	7	11	15	19	23	27	31	35	39	3
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	0
	6	11	16	21	26	31	36	41	46	1
	7	12	17	22	27	32	37	42	47	2
	8	13	18	23	28	33	38	43	48	3
	9	14	19	24	29	34	39	44	49	4
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	0
	7	13	19	25	31	37	43	49	55	1
	8	14	20	26	32	38	44	50	56	2
	9	15	21	27	33	39	45	51	57	3
	10	16	22	28	34	40	46	52	58	4
	11	17	23	29	35	41	47	53	59	5
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	0
	8	15	22	29	36	43	50	57	64	1
	9	16	23	30	37	44	51	58	65	2
	10	17	24	31	38	45	52	59	66	3
	11	18	25	32	39	46	53	60	67	4
	12	19	26	33	40	47	54	61	68	5
	13	20	27	34	41	48	55	62	69	6
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	0
	9	17	25	33	41	49	57	65	73	1
	10	18	26	34	42	50	58	66	74	2
	11	19	27	35	43	51	59	67	75	3
	12	20	28	36	44	52	60	68	76	4
	13	21	29	37	45	53	61	69	77	5
	14	22	30	38	46	54	62	70	78	6
	15	23	31	39	47	55	63	71	79	7
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	0
	10	19	28	37	46	55	64	73	82	1
	11	20	29	38	47	56	65	74	83	2
	12	21	30	39	48	57	66	75	84	3
	13	22	31	40	49	58	67	76	85	4
	14	23	32	41	50	59	68	77	86	5
	15	24	33	42	51	60	69	78	87	6
	16	25	34	43	52	61	70	79	88	7
	17	26	35	44	53	62	71	80	89	8
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
	COCIENTES									

66. *Segundo caso.*—Para *dividir un polidigito por otro*, pero con la condición de *que el cociente tenga una sola cifra*, bastará: *dividir la primera ó las dos primeras cifras del dividendo por la primera del divisor y el número que resulte será el cociente*. Como puede suceder que esta cifra sea *mayor* que el verdadero cociente, basándonos en la quinta propiedad de la división **(62)** multiplicaremos la cifra del cociente por el divisor y *si la división está bien hecha, se podrá restar* ese producto de el dividéndo, es decir, *el producto será menor* que el dividendo.

En caso que el producto fuera mayor que el dividendo, *la cifra* que hemos obtenido *no será el verdadero cociente* y volveremos á ensayar con otra cifra, que tenga *una unidad menos*.

La diferencia que resulta de restar del dividendo, el producto del cociente por el divisor constituirá el residuo.

Ejemplo: 8165 : 2236

	8165	2236
$2236 \times 4 = 8944$		4 *Cociente*

Como se vé *no es posible restar*, por ser el sustraendo *mayor* que el minuendo. Probaríamos entonces con el número 3 como cociente.

Dividendo:	8165	2.236 *Divisor*
$2236 \times 3 =$	-6708	3 *Cociente.*
	1.457 *Residuo.*	

Como vemos *se ha podido restar*, luego 3 es la cifra del *cociente*.

—Sin embargo, puede suceder que el número del cociente *sea menor* que el verdadero y ese se comprobará al notar que el resíduo es mayor que el divisor.

$$\begin{array}{r|l} \text{Ejemplo: } 9\,845 & 3\,041 \\ \cline{2-2} 3\,041 \times 2 = -6\,082 & 2 \\ \cline{1-1} \textit{Residuo} \quad 3\,763 & \end{array}$$

En este caso 3 763 es mayor que el divisor 3 041, luego, habrá que aumentar la cifra del cociente, que será **3**.

67. Para conocer inmediatamente si al dividir un polidígito por otro, el cociente tiene una sola cifra, nos bastará *multiplicar el divisor* por 10 y si el producto *es mayor* que el dividendo, el cociente no tendrá mas que *una cifra*.

Ejemplo: 16 743 : 1 785, multiplicando 1 785 por 10, nos dá 17.850 que *es mayor* que el dividendo 16.743, luego, en el cociente *no hay mas que una* sola cifra.

68. Conviene al sacar el resíduo, acostumbrarse á *restar directamente* del dividendo el producto del divisor por el cociente, sin necesidad de escribirlo.

$$\begin{array}{lr|ll} \text{Ejemplo: } \textit{Dividendo} & 76\,836 & 9\,525 & \textit{Divisor} \\ \cline{3-3} \qquad\quad \textit{Resíduo} & 636 & 8 & \textit{Cociente} \end{array}$$

69. *Tercer caso.—Para dividir un polidígito, por otro, siendo el cociente polidígito*, debemos conocer previamente cuantas cifras tendrá el cociente.

Concretando á un caso práctico, supongamos que debemos dividir 3.768.432 por 265, es decir:

3.768.432 : 265

Para conocer cuantas cifras tendrá el cociente nos bastará: multiplicar el divisor *por la unidad seguida de tantos ceros*, como unidades contiene la *diferencia* entre las cifras del dividendo y del divisor. En este caso serán 7 cifras del dividendo *ménos* 3 cifras del divisor, que nos dán 4 *ceros* que debemos agregar á la unidad, es decir que debemos multiplicar el divisor por **10 000**, lo que nos dará 2.650.000. Cantidad *menor* que el dividendo.

Si multiplicamos por **100.000** tendremos el número 26.500.000 que es *mayor* que el dividendo 3.768.432.

Luego, el cociente *será mayor* que 10.000 *y menor* que 100.000, es decir, el cociente constará de *cinco* cifras.

Así, el cociente de la división 456.384 : 2 382 constará de *tres* cifras, porque

$$2\,382 \times 100 = 238.200 < 456.384 \text{*}$$
$$\text{y} \quad 2\,382 \times 1000 = 2.382.000 > 456.384$$

lo que nos dice, que el cociente estará comprendido entre 100 y 1.000, es decir que constará de *tres* cifras.

76. Veamos ahora cual es la regla para efectuar la división, en este caso.

1° *Se separará empezando por la izquierda, tantas cifras en el dividendo como cifras haya en el divisor ó una más, si el número espresado por esas cifras fuese menor que el divisor, y se averigua cuantas veces este último se encuentra contenido en esa primera parte del dividendo ó dividendo parcial y el número que resulte será la primera cifra del cociente.*

2° *Se multiplica esta primera cifra del cociente ó primer cociente parcial por todo el divisor y se escribe debajo del primer dividendo parcial, efectuando la resta para determinar el primer residuo.*

3° *A la derecha de este primer residuo se baja ó escribe la siguiente cifra del dividendo, y el número así*

---

* Los signos $<$ y $>$ se leen ($<$) *menor que* y ($>$) *mayor que*, es decir $2 < 3$ se leerá, *2 menor que 3*, y $6 > 5$ se leerá, *6 mayor que 5.*

formado será el segundo dividendo parcial, que se divide nuevamente por el divisor, determinándose la segunda cifra del cociente ó segundo cociente parcial, con el cual, se sigue operando como con el primero y así sucesivamente, hasta agotar todas las cifras del dividendo.

4º *Si al bajar una cifra del dividendo, no estuviera contenido el divisor en el número que se origina, se escribirá un cero en el cociente y se seguirá la operación, como se ha indicado anteriormente, bajando préviamente otra cifra del dividendo.*

5º *Si la división no fuese exacta, es decir que quedára algún resíduo, se escribirá el último resíduo á continuación del cociente total y debajo de él se colocará el divisor, separado por una raya horizontal, formándose así, un quebrado.*

Ejemplo 1º—Sea dividir 122.382 por 523

Primer dividendo parcial	**1223**'8'2	523 Divisor
Producto de **523** por **2**	= 1046	2 3 4 Cociente total
1er resíduo y 2do dividendo parcial	1 7 7 8	
Producto de **523** por 3	= 1 5 6 9	
2do resíduo y 3er dividendo parcial	209 2	
Producto de 523 por 4	= 209 2	
	0000	1er cociente parcial 2do 3er

Ejemplo 2º—Sea dividir 681 476 por 3.276.

1er dividendo parcial	**6814**'7'6'	3276 Divisor
Producto de **3276** por **2**	= 6552	$208\frac{68}{3276}$ Cociente total
1er resíduo y 1er y 2do div.parcial	26276	
Producto de 3276 por **8**	= 26208	
Resíduo	68	1er cociente parcial 2do 3er

71. Lo mismo que en el caso anterior (68), para economizar trabajo, en vez de escribir debajo de los dividendos parciales, el producto de cada cociente parcial por el divisor y en seguida efectuar la resta, se pueden hacer estas operaciones mentalmente, y efectuar *directamente* el producto del cociente parcial por el divisor y restarlo del dividendo.

Ejemplo:—Según la regla establecida, para dividir 387.432 por 735 se operaría así:

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 3874'3'2 & 735 \\ \cline{3-3}
735 \times 5 = & 3675 & 527\ \frac{87}{735} \\ \cline{2-2}
 & 1993 & \\
735 \times 2 = & 1470 & \\ \cline{2-2}
 & 5232 & \\
735 \times 7 = & 5145 & \\ \cline{2-2}
 & 87 &
\end{array}
$$

Y operando según lo aconsejado ahora, se procedería

$$
\begin{array}{r|l}
3874'3'2 & 735 \\ \cline{2-2}
1993 & 527\ \frac{87}{735} \\
5232 & \\
87 &
\end{array}
$$

72. Casos Particulares.—1º *Si el dividendo está compuesto de varias cifras y el divisor tiene una sóla*, es decir, si se divide un número cualquiera por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, se dice que se trata de sacar la *mitad*, *tercera parte*, *cuarta parte*, *quinta*, *sexta*, *séptima*, *octava y novena parte* y la operación se dispone de la siguiente manera:

Sea por ejemplo dividir 8642 por 2. Se diría la mitad de **8** es **4**; la mitad de **6** es **3**; la mitad de **4** es **2**; la mitad de **2** es **1**.

$$\frac{8642}{4321}\ \begin{matrix}\textit{Dividendo}\\ \textit{Cociente}\end{matrix}$$

2º Ejemplo: Dividir 74.683 por 7.

$$\frac{74683}{10669}\ \begin{matrix}\textit{Dividendo}\\ \textit{Cociente}\end{matrix}$$

y se diría: la 7ª parte de **7** es **1**; la 7ª parte de **4** es **0**; 7ª parte de **46** es **6**; y sobran 4 que darán 48; 7ª parte de **48** es **6**; y sobran 9 que dán 63; 7ª parte de **63** es **9**.

73. 2º *Si hubiera que dividir por 10, 100, 1000... un número que termina en ceros, bastará suprimir al dividendo tantos ceros como hay en el divisor y ese será el cociente.*

Ejemplos: 34,670 : 10 = 3467
74,800 : 10 = 7480
74,800 : 100 = 748

74. 3º *En caso de que el dividendo y divisor terminaran en ceros, se suprimirán tantos ceros en ambos términos, como ceros tenga el que tiene ménos, y al residuo, si lo hay, se le agrega ese mismo número de ceros.*

Ejemplo 1º. Dividamos 7650 : 450

Sería 7650 : 450 = 765 : 45

$$\begin{array}{l|l} 765 & 45 \\ \cline{2-2} 315 & 17 \\ \underline{000} & \end{array}$$

que *dá el mismo cociente* que dividiendo 7650 por 450.

2º.—436.700 : 8300

```
   4367 | 83
        |----
    217   52
Residuo  5100
```

3º.—76.800 : 360

```
   7680 | 36
        |----
    48    213
   120
Residuo  120
```

Se dice que *un número* **es divisible** por otro, cuando *lo contiene* un número exacto de veces, es decir, cuando efectuada la división, *dá un residuo cero.*—Así 28 *es divisible* por *2, 7* y *4* porque dividiendo 28, por 2, 4 y 7 darán un *residuo cero.*

75. Además de las propiedades de la división enumeradas anteriormente (**63**), hay que tener presente las siguientes, que se deducen de todo lo espuesto.

I.

No se altera el valor del cociente multiplicando ambos términos por un mismo número.

Ejemplo:

$$12 : 4 = 3$$

y si multiplicásemos por 2

$12 \times \mathbf{2} : 4 \times \mathbf{2} = 24 : 8 = \mathbf{3}$ *igual al cociente anterior.*

II.

No se altera el valor del cociente dividiendo ambos términos de la división por un mismo número.

Ejemplo:

$$36 : 9 = 4$$

y *dividiendo* por 3 ambos términos de la división.

$(36 : 3) : (9 : 3) = 12 : 3 = 4$, resultado idéntico.

III.

El divisor de varios números dividirá también á su suma.

Ejemplo: Si **4** es divisor de 8, de 12 y 16, también será divisor de su suma.

Efectivamente $8 + 12 + 16 = 36$ que es divisible por **4**.

IV.

El divisor de dos números es también divisor de su diferencia.

Ejemplo: **7** divide á 56 y 21, luego dividirá también á $56 - 21 = $ **35**.

V.

Todo producto es divisible por cada uno de sus factores. Así el producto 12 es divisible por 4 y por 3.

Efectivamente

	12	4		12	3
Residuo	0	3	*Residuo*	0	4

VI.

Para dividir un producto, basta dividir uno de sus factores.

Así, para dividir por 2 el número 24, que se considera formado por el producto de 3 × 4, *nos bastará dividir* el factor 8 por 2.

Efectivamente

$$(8 \times 3) : 2 = 24 : 2 = \mathbf{12}$$

y aplicando la regla

$$3 \times (8 : 2) = 3 \times 4 = \mathbf{12}$$

VII.

Para dividir un número, por el producto de varios factores, bastará dividir el número por uno de los factores; el cociente que resulta, dividirlo por el 2º factor y así sucesivamente.

Ejemplo: 192 : 2 × 3 × 4 sería

$$\begin{array}{llllll}
 & 192 & \underline{|\ \mathbf{2}\quad} & & & \\
\textit{Residuo} & 0 & 96 & \underline{|\ \mathbf{3}\quad} & & \\
 & \textit{Residuo} & 0 & 32 & \underline{|\ \mathbf{4}\quad} & \\
 & & \textit{Residuo} & 0 & 8 & \textit{Cociente,}
\end{array}$$

haciéndolo directamente, tendremos

$$192 : 2 \times 3 \times 4 = 192 : 24$$

$$\begin{array}{lll}
192 & \underline{|\ 24\quad} & \\
0 & 8 & \textit{Cociente.}
\end{array}$$

76. Siendo la Multiplicación y División operaciones completamente inversas, se comprende cómo estas operaciones se servirán mútuamente de *Prueba*, para verificar la exactitud de la operación practicada.

77. La **Prueba de la Multiplicación**, *se efectúa dividiendo el producto por uno de los factores y si la operación está bien hecha, el cociente será igual al otro factor.*

Así		Prueba	
	365	879,6,5	365
	241	1496	241 = *al otro factor*
	365	365	
	1460	000	
	730		
	87.965		

También puede comprobarse *poniendo el multiplicando por multiplicador* y vice-versa.

78. La **Prueba de la Division**, se hace *multiplicando el divisor por el cociente y si la operación está bien hecha, el producto debe ser igual al dividendo.*

En caso de haber residuo, se agregará á ese producto.

Así

		Prueba
87965	365	
1496	241	365
365		× 241
0		365
		1460
		730
		87905 = *al dividendo.*

Si hubiera resíduo

```
         67486 | 263          Prueba
          1488   256            263
           1736                ×256
Resíduo     158                1578
                              1315
                              526
                              67328
                  Resíduo    + 158
                              67486 = al dividendo.
```

Ejercicios

Dividir

8634 : 2, — 7644 : 4, — 6385 : 867, — 8956 : 2312, — 765830 : 42600, — 1867325000 : 764300

Problemas

1º Teniendo un estanciero tres majadas compuestas la 1ª de 3473, la 2da de 3847 y la 3ra de 4830 ovejas, apartó 6000 ovejas para el establecimiento y vendió el resto á razón de 8 pesos cada una.

Deseo saber cuánto dinero habrá recibido el estanciero, sabiendo que la mitad del producto de la venta se repartió entre los 40 peones de la estancia, y cuánto habrá recibido cada peón.

2º Cuatro cazadores, de regreso del campo, trajeron 972 patos que vendieron á razón de 16 pesos la docena. Deseo saber qué cantidad de dinero habrán recibido entre los cuatro cazadores y cuantos patos habrá cazado el 4º cazador, sabiendo que el 1ro trajo 168; el 2do 245 y el 3ro 274.

3º Un agricultor sembró tres cuadras de trigo; en la primera arrojó 34.875 granos, en la 2da 71.432 y en la 3ra 56.743.

Los pájaros se comieron 22.820 granos, 17.430 se malograron y el resto brotó, produciendo dos espigas cada planta con treinta y cinco granos cada una. Deseo saber cuantas fanegas de trigo habrá recojido, sabiéndo que cada fanega contiene 197,450 granos.

CAPÍTULO III.

POTENCIAS

79. Se llama **Potencia** *de un número, el producto* que resulta de repetir ese número, varias veces como factor.

Si se toma *dos veces* como factor, se forma la *segunda potencia ó cuadrado*; si se toma *tres veces* como factor, se formará la *tercera* potencia *ó cubo;* si *cuatro* veces se tiene la *cuarta potencia* y así sucesivamente.

El *número de veces* que se toma como factor, *se indica* por medio de un pequeño número que se escribe á la derecha del número dado y un poco mas elevado.

Así, para expresar la *séptima potencia* de 4, se escribirá

$$4^7$$

que se leerá *cuatro elevado á la séptima potencia* y este pequeño número 7 toma el nombre de *Exponente*, é indica las veces que el número 4 se ha de *tomar como factor*.

— Luego, á *todo número* se le puede considerar como teniendo por *exponente la unidad*, es decir que

$$6 = 6^1$$

80. La operación que se hace para hallar la potencia de un número se llama *Elevación á potencias*.

El número cuya potencia se quiere hallar, se llama *base* y se llama *grado de la potencia* al *número de veces* que se toma como factor.

Luego, el *exponente indica el grado* de la potencia.

81. De lo expuesto resulta que *para elevar un número*

al cuadrado, se multiplica por sí mismo,

al cubo, se multiplica *dos veces* por sí mismo,

á la cuarta potencia, se multiplica *tres veces* por sí mismo,

á cualquier potencia, se multiplica por sí mismo *tantas veces*, como unidades tiene el exponente *menos una*.

Es decir

$$6^2 = 6 \times 6$$
$$5^3 = 5 \times 5 \times 5$$
$$7^4 = 7 \times 7 \times 7 \times 7$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

82. Cuando se tiene

$$6^2 = 6 \times 6 = \mathbf{36}$$

éste número **36** será *el cuadrado* de **6**.

—Si fuera

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = \mathbf{125}$$

el número **125** sería *el cubo* de **5**.

83. Conviene tener presente y *récordar el cuadrado* y *el cubo de* los *diez* primeros números, los que serán

Número	1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10
Cuadrado	*1 - 4 - 9 - 16 - 25 - 36 - 49 - 64 - 81 - 100*
Cubo	**1 - 8 - 27 - 64 - 125 - 216 - 343 - 512 - 729 - 1000**

84. Pasaremos ahora á indicar algunos *Principios generales* que se demostrarán en la *Aritmética Razonada.*

I.

85. *El cuadrado de un número entero debe ser entero.*

II.

86. *El cuadrado de un número exacto de decenas deberá ser un número exacto de centenas,*

$$30^2 = 30 \times 30 = 900$$

III.

87. *El cuadrado de un número compuesto de decenas y unidades, será igual al cuadrado de las decenas más el duplo de las decenas por las unidades, más el cuadrado de las unidades.*

Así, si se tuviere

$$34^2 = (3 \text{ decenas} + 4 \text{ unidades})^2$$

se tendría

$$34^2 = 30^2 + (2 \times 30 \times 4) + 4^2$$

es decir

$$34^2 = 900 + 240 + 16$$

ó bién

$$34^2 = 1156$$

resultado igual al que se obtendría, haciendo directamente la operación, pues

$$34^2 = 34 \times 34 = 1156$$

IV.

88. *El cubo de un número formado por decenas y unidades, es igual al cubo de las decenas, más el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, más el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades, más el cubo de las unidades.*

Si tuviéramos

$$56^3 = (5 \text{ decenas } + 6 \text{ unidades})^3$$

se tendría

$$56^3 = 50^3 + (3 \times 50^2 \times 6) + (3 \times 50 \times 6^2) + 6^3$$

ó bién

$$56^3 = 125000 + 45000 + 5400 + 216$$

es decir

$$56^3 = \mathbf{175.616}$$

que sería igual el resultado que se obtendría haciendo directamente la operación, es decir

$$56^3 = 56 \times 56 \times 56 = \mathbf{175.616}$$

V.

89. *La potencia de un producto es igual al producto de las potencias de los factores.*

Así

$$(3 \times 5 \times 6)^2 = \mathbf{3^2 \times 5^2 \times 6^2}$$

Efectivamente, haciendo las operaciones indicadas sale

$$90^2 = 9 \times 25 \times 36$$

ó bién

$$8100 = 8100$$

VI.

90. *La potencia de un cociente, es igual al cociente de la potencia del dividendo, dividido por la potencia del divisor.*

Así

$$\left(\frac{24}{3}\right)^2 = \frac{24^2}{3^2}$$

ó bién, haciendo las operaciones

$$8^2 = \frac{576}{9}$$

ó bién

$$64 = 64$$

VII.

91. *El producto de varias potencias es igual á una potencia del mismo número, cuyo grado está expresado por la suma de los exponentes de las potencias de los factores.*

Así

$$2^2 \times 2^3 \times 2^4 = 2^{2+3+4} = 2^9$$

Efectivamente, haciendo las operaciones sale

$$4 \times 8 \times 16 = 2^9$$

ó bién

$$512 = 512$$

VIII.

92. *Para elevar una potencia á otra potencia bastaría elevar el minuendo dado á una potencia cuyo exponente sea el producto de los exponentes dados.*

Así

$$(3^2)^3 = 3^{2 \times 3}$$

ó bién

$$(9)^3 = 3^6$$

es decir

$$729 = 729$$

EJERCICIOS.

23^2	$(8 + 5)^2$	$(8 \times 3 \times 7)^2$
246^3	$(9 + 12)^3$	$(729 \div 9)^3$
1004^3	$(5 + 6)^3$	$12^3 \times 12^3 + 12^5$
6742^3	$(14 + 10)^3$	$(324^2)^3$

CAPÍTULO IV.

RAIZ CUADRADA

93. Hemos visto (79), que se llama **cuadrado** de un número, *el producto de ese número por sí mismo* ó el producto que resulta de tomar ese número *dos* veces como factor.

94. Si se dá como *conocido el cuadrado* y se pide *hallar el número con el cual se ha formado*, el número que resulta, será la *raiz cuadrada*.

De modo que hallar la **Raiz cuadrada** de un *número* es, hallar otro número que *elevado al cuadrado*, produce el *número dado*.

Así, la *raiz cuadrada* de **9** es **3** porque $3 \times 3 = 9$; la *raiz cuadrada* de **25** es **5** porque $5 \times 5 = 25$.

95. Para indicar que se quiere extraer la *raiz cuadrada*, se usa un signo llamado *radical* ($\sqrt{\ }$), en cuya abertura se coloca un **2**, que generalmente no se usa, y se lée, *raiz cuadrada, raiz segunda ó raiz de segundo grado.*

Ese *dos*, que se coloca entre los brazos del signo radical, se suele llamar *índice radical.*

96. Reproduciendo los cuadrados de los números comprendidos entre **1** y **10**.

Raiz cuadrada	**1**,	**2**,	**3**,	**4**,	**5**,	**6**,	**7**,	**8**,	**9**,	**10**
Números	2,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100

vemos, que todos los números comprendidos en **1** y **100** tendrán *raices cuadradas* comprendidas entre **1** y **10**. —Observaremos también, que entre 1 y 100 *solo, habrá diez* números que tengan raíz cuadrada *exacta*, los demás, tendrá raíz cuadrada *incomensurable*, pero que se puede obtener con la *aproximación* que se pida, como lo veremos más adelante.

97. Cuando el número *no tiene* raíz cuadrada *exacta*, su raíz cuadrada *será la raiz del mayor cuadrado* contenido en él y quedará un cierto sobrante, que se llama *residuo.*

Así, el número **16** tiene raíz cuadrada *exacta* que es 4, y el número **67**, tiene raíz cuadrada *incomensurable* que es **8** con un *residuo* **3**, porpue $8 \times 8 = 64$ que está contenido en 67, dejando un sobrante igual á 3.

La operación se indicaría como sigue:

$$\textit{Hallar la } \sqrt[2]{16} = 4$$

$$\sqrt[2]{67} = 8 + \textit{residuo } 3$$

98. Vemos, que la **prueba** de la raíz cuadrada, es *multiplicar la raiz por sí misma y agregarle el resíduo*, si lo tiene, y si la operación está bien hecha, el resultado deberá ser *igual* al número propuesto.

Ejemplo 1º:

$$\textit{Hallar la } \sqrt[2]{36} = 6$$

PRUEBA

$$6 \times 6 = \mathbf{36}$$

Ejemplo 2º:

$$\textit{Hallar la } \sqrt[2]{88} = \mathbf{9} + \textit{resíduo } 7$$

PRUEBA

$$9 \times 9 + 7 = 81 + 7 = \mathbf{88}$$

Esta prueba, se puede aplicar á todos los casos de extracción de raíces.

99. *Cuando el número es mayor que* **100**, *para extraer prácticamente la raiz cuadrada de un número, se procederá de la siguiente manera:*

1º *Se empieza por dividir el número propuesto en períodos de dos cifras empezando por la derecha, pudiendo ser el último período de una ó dos cifras.*

2º *Se vé cual es el mayor cuadrado contenido en el primer período de la izquierda, cuya raíz cuadrada se escribe á la derecha del número dado, sobre una raya horizontal que se colocó previamente. Este número, será la primera cifra de la raíz.*

3º *Se forma el cuadrado de esta primer cifra de la raiz y se resta del primer período.*

4º *Á la derecha del residuo obtenido, se escribe el 2º período, separando con una coma, una cifra á la derecha.*

5º *Se duplica la raiz hallada, que se escribe debajo de la raya horizontal.*

6º *Se divide el número que quedó á la izquierda de la coma en el residuo, por ese duplo de la raiz hallada y el cociente se escribe á la derecha del duplo de la raiz hallada.*

7º *El número así obtenido, se multiplica por el nuevo cociente y el producto se resta del residuo, obteniéndose así un 2º residuo. Si el producto es menor que el primer residuo, el cociente será la segunda cifra de la raiz y si el producto es mayor que el residuo, la segunda cifra de la raiz tendrá una unidad menos.*

8º *Comprobada de esa manera la 2ª cifra de la raiz, se escribirá sobre la raya horizontal, al lado de la primera cifra.*

9º. *De aquí para adelante se irán repitiendo las operaciones, que hemos hecho con el 2º período, es decir, se escribirá á la derecha del segundo residuo, las cifras que componen el tercer período, se separará una cifra á la derecha y el número que queda á la izquierda de la coma se divide por el dúplo de la raiz hallada, que está ahora compuesta de dos cifras y así se sigue como antes, hasta haber agotado todos los períodos.*

Ejemplo 1°:

Hallar la $\sqrt{235225}$

Solución

	23.52.25	485 *Raiz*
$4^2 =$	-16	$4 \times 2 = 88 \times 8 = 704$
1er *residuo* = 7	75,2	$48 \times 2 = 965 \times 5 = 4825$
	-704	
2° *residuo* = 48	482,5	
	-4825	
3er *residuo*	0000	

Luego, el número **485** es la raíz cuadrada *exacta* del número 235225.

Prueba

$485 \times 485 = \mathbf{235225}$

Ejemplo 2°:

Hallar la $\sqrt{7985618}$

Solución

	7.98.56.18	2825 *Raiz*
$2^2 =$	-4	$2 \times 2 = 48 \times 8 = 384$
	39,8	$28 \times 2 = 562 \times 2 = 1124$
	-384	$282 \times 2 = 5645 \times 5 = 28.225$
	145,6	
	-1124	
	3321,8	
	28225	
	4993	

luego, la *raíz cuadrada* del número 7985618 es **2825** con un resíduo de 4993 unidades.

PRUEBA

$$2825 \times 2825 + 4993 = 7.980.625 + 4993$$
$$= \mathbf{7.985.618}$$

100. Cuando al determinar una cualquiera de las cifras de la raíz, se encuentra que la parte de resíduo que debe dividirse *es menor* que el *doble de la raíz hallada* que nos ha de servir como divisor, eso indica que *la cifra de la raíz es cero,* se pone ese *cero* como *cifra* de la raíz, se baja el período siguiente y se sigue como antes.

Ejemplo 1º:

Hallar la $\sqrt{43681}$

SOLUCIÓN

4.36.81	209 *Raíz*
− 4	2 × 2 = 40
03,68,1	20 × 2 = 409 × 9 = 3681
− 3681	
0000	

luego

$$\sqrt{43681} = \mathbf{209}$$

PRUEBA

$$209 \times 209 = \mathbf{43681}$$

Ejemplo 2º:

Hallar la $\sqrt{13734561}$

13.73.45.61	3706 *Raiz*
− 9	$3 \times 2 = 67 \times 7 = 469$
4,73	$37 \times 2 = 74$
− 4 69	$370 \times 2 = 7406 \times 6 = 44436$
45,46.1	
44436	
125	

luego

$$\sqrt{13.734.561} = \mathbf{3706} + \text{resíduo } 125$$

PRUEBA

$$3706 \times 3706 + 125 = 13734436 + 125$$
$$= 13.734561$$

RAIZ CÚBICA

101. Se llama *raiz cúbica* de un número dado, aquel número, que elevado al *cubo ó multiplicado dos veces* por sí mismo, ó *tomado tres veces como factor* reproduce el número propuesto.

Así **3** es la raíz cúbica de **27**, porque

$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

102. Para *indicar la extracción* de la raíz cúbica se usa también el signo radical, poniendo entre sus brazos el *índice radical* 3.

La expresión

$$\sqrt[3]{128}$$

se leería *raiz cúbica; raiz tercera ó raiz de tercer grado* de 128.

103. Para *extraer la raiz cúbica* de los números *menores* que **1000**, nos bastará conocer la siguiente tabla que nos dá *el cubo* de los diez primeros números:

Raiz cúbica	**1,**	**2,**	**3,**	**4,**	**5.**	**6,**	**7,**	**8,**	**9,**	**10.**
Número	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000.

Observamos pues, que entre los números *uno* y *mil*, solo *diez*, tendrán *raiz cúbica exacta*. Los demás, la tendrán *incomensurable*.

Así $$\sqrt[3]{125} = \mathbf{5}$$

$$\sqrt[3]{223} = \mathbf{6} + \textit{residuo } 7$$

104. De aquí se deduce, que la **prueba** *de la raiz cúbica* consiste en *formar el cubo de la raiz* hallada y *agregarle*, el residuo, si lo tiene.

105. Cuando el número es mayor que 1000 se aplicará la siguiente regla:

1º *Se divide el número propuesto en periodos de tres cifras empezando por la derecha, pudiendo ser el último periodo de una, dos ó tres cifras.*

2º *Se vé cual es el mayor cubo contenido en el primer periodo de la izquierda y la raiz cúbica de este cubo se escribe como primer cifra de la raiz.*

3º *Se forma el cubo de esta primera cifra y se resta del primer periodo.*

4º *A la derecha del residuo obtenido se escribe el segundo periodo, separando con una coma, dos cifras á la derecha.*

5º *Se forma el triplo del cuadrado de la raiz hallada.*

6º *Se divide el número que queda á la izquierda de* *la coma, por este triplo del cuádrado de la raíz hallada.*

7° *El cociente que resulta, será la segunda cifra de la raíz y para comprobarlo se formará el cubo de la raíz hallada y se restará no ya del resíduo, sino de los dos primeros periodos del número propuesto.*

8° *Si el cubo formado, fuera mayor que los dos primeros periodos, eso probará que la segunda cifra de la raíz es demasiado alta y por consiguiente, deberemos disminuirla en una unidad y comprobarla de nuevo.*

9° *A la derecha de este segundo resíduo se bajará el tercer periodo, separando en seguida dos cifras á la derecha y después, se procederá como antes.*

10° *En caso de que el triple del cuadrado de la raíz hallada, fuera mayor que el número formado á la izquierda de la coma del resíduo, la cifra de la raíz será cero, qué se escribirá al lado de las anteriores, bajándose enseguida el periodo subsiguiente y prosiguiéndose la operación como está indicado.*

Ejemplo 1°:

Extráigase la $\sqrt[3]{716.917.375}$

SOLUCIÓN

	716.917.375	**895** *Raíz*
$8^3 =$	542	$3 \times 8^2 = 192$ que está contenido 9 veces en 1749.
1er *Resíduo*	1749,17	$3 \times 89^2 = 23763$ id id 6 en 119483.
$89^3 =$	704969 *que se resta* de **716.917**	
2° *Resíduo*	119483,75	
$895^3 =$	716.917.375 *que se resta* de **716.917.375**	
Resíduo	000.000.000	

Este resíduo *cero,*

nos dice, que el número propuesto tiene *raíz cúbica exacta*.

Ejemplo 2º:

Extráigase la $\sqrt[3]{39.477.655.149}$

SOLUCIÓN

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 39.477.655.149 & 3405 \textit{ Raíz} \\
3^3 = & 27 & 3 \times 3^2 = 27 \\
 & & 3 \times 34^2 = 3468 \\
1^{er} \textit{ Residuo} & 124,77 & 3 \times 340^2 = 346800 \\
34^3 = & 39304 \textit{ que se resta de } 39477 & \\
2^{o} \textit{ Residuo} & 1736,55 \textit{ que no se puede dividir por } 3468 & \\
3^{er} \textit{ Residuo} & 1736551,49 & \\
3405^3 = & 39.477.655.125 & \\
\textit{Residuo} & 00.000.000.024 &
\end{array}
$$

lo que nos dice, que la raíz cúbica del número propuesto es **3405** con un sobrante de 24 unidades.

EJERCICIOS

$\sqrt{2783541}$	$\sqrt[3]{45832}$
$\sqrt{400005}$	$\sqrt[3]{489765324}$
$\sqrt{274187}$	$\sqrt[3]{62430001}$
$\sqrt{6347000}$	$\sqrt[3]{700000008}$

CAPÍTULO V.

PROPIEDADES DE LOS NUMEROS ENTEROS.

DEFINICIONES

106. Si *al dividir un número* por otro, nos resultara un *cociente exacto*, se dice que el primer número es **divisible** por el segundo.

Así **8** *es divisible* por **2**, porque
8 : 2 = 4, *cociente exacto*

107. Se llama **múltiplo** de un número, *el producto* de multiplicar ese mismo número, por un número *entero* cualquiera.

Así el número **8** es un múltiplo del *número* **2** porque multiplicado por *un número entero* **4,** nos dá el producto 8.

Luego, **8** es **divisible** por **2** y **múltiplo** de **2**.

108. Cuando un número *divide exactamente* á otro, se dice que el primer número es **divisor** y **submúltiplo.**

Así, el número **2** es *divisor y submúltiplo* de **8**, porque el 2 *divide exactamente* al número 8.

109. De estas definiciones deducimos, que *siempre que un número es múltiplo de otro,* este otro *será un submúltiplo* del primero.

Así, 8 *es múltiplo* de 2 y de 4, y los números 2 y 4 *son submúltiplos* de 8.

110. Observamos también que un número cualquiera puede tener *infinitos múltiplos* y un número limitado ó *ningún* submúltiplo.

Estos números que *no tienen ningún submúltiplo*, se llaman *números primos*.

111. Luego, se llama **número primo**, *aquel que no tiene ningún submúltiplo*, ó que **no es divisible** *sinó por sí mismo ó la unidad.*

Así, los números 1, 3, 17, 23, *son números primos* porque no tienen más divisor que el mismo número ó la unidad.

112. **Números primos entre sí**, *son aquellos que descompuestos en sus factores no tienen ningún factor común.*

Así, los números 10 y 21 son primos entre sí, porque descompuestos en sus factores 2, 5; 3, 7, no tienen ningún divisor ó factor común.

—Se llama *número par*, el que es divisible por 2, como 4, 6, 8; é *impar* el que no es divisible por 2 como 3, 5, 7, etc.

Divisibilidad.

113. Se llama *divisibilidad, la parte de la aritmética, que trata de determinar las condiciones que deben satisfacer los números para que sean divisibles* (**106**) *por otro.*

I.

Todo número es **divisible por dos**, *cuando termina en cero ó cifra par.*

Así, serán divisibles por 2, los números

130, 42, 74, 136, 1468.

II.

Todo número es **divisible por tres**, cuando *la suma de los valores absolutos de su cifras significativas dá tres ó un múltiplo de tres.*

Así, serán divisibles por **3** los números:

21	porque	2 + 1 = 3	
201	»	2 + 1 = 3	
36	»	3 + 6 = 9	*múltiplo* de 3
3.021	»	3 + 2 + 1 = 6	» » »
67.425	»	6 + 7 + 4 + 2 + 5 =24	» » »

III.

Todo número **es divisible por 4**, *cuando el valor representado por las decenas y unidades, es cero ó un múltiplo de cuatro.*

Así serán divisibles por **4** los números **300**; **264**; **1328**; **2912**, porque los números **00**, **64**, **28**, **12** son múltiplos de **4**, siendo *cero* el primero.

IV.

Todo número **es divisible por cinco**, *cuando el número termina en cero ó en cinco.*

Así, **320**; **85**; **1200**; **3205**; son divisibles por 5, porque terminan en **0**, ó en **5**.

V.

Todo número **es divisible por ocho**, *cuando las cifras de las centenas, decenas y unidades constituyen un número múltiplo de ocho ó terminan en tres ceros.*

Así, los números 25,**000**; 3,**064**; 4,**624**; 15,**448** son divisibles por **8** porque terminan en **000**; **064**; **924**; **448**; que son *múltiplos de* **8**.

VI

Todo número **es divisible por nueve**, *cuando la suma de las cifras significativas dá nueve ó un múltiplo de nueve.*

Así, los números 45; 99; 3,249; 6,003; 12,402; 85,698, son divisibles por **9**, porque la suma de las cifras significativas dá:

$$4 + 5 = \mathbf{9}$$
$$9 + 9 = \mathbf{18}$$
$$3 + 2 + 4 + 9 = \mathbf{18}$$
$$6 + 3 = \mathbf{9}$$
$$1 + 2 + 4 + 2 = \mathbf{9}$$
$$8 + 5 + 6 + 9 + 8 = \mathbf{36},$$ que son múltiplos de nueve.

VII.

Todo número es divisible **por diez, cien, mil** ...., *si termina en uno, dos, tres, ... ceros.*

Así, 4**80** es divisible por **10**; 32**00**, es divisible por **100**; 283,**000** es divisible por **1000**.

VIII.

Todo número **es divisible por veinticinco**, *cuando termina en dos ceros, ó cuando las dos últimas cifras significativas constituyen un múltiplo de veinte y cinco.*

Así **1.300**; **24.000**; **650**; **1375** son divisibles por **25**.

IX.

Todo número **es divisible por ciento veinte y cinco,** *cuando termina en tres ceros, ó cuando las cifras de las centenas, decenas y unidades* constituyen un *múltiplo de* **125.**

Así **4000; 3125; 6375; 17250;** son divisibles por 125.

X.

Todo número **es divisible por once,** *cuando la diferencia entre las sumas de las cifras significativas de lugar par y la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar impar, es cero, once, ó un múltiplo de once.*

Así, los números **11385; 160600; 162745; 61809,** son divisibles por 11 porque:

$$(1 + 3 + 5)-(1 + 8) = 9 - 9 = \mathbf{0}$$
$$(6 + 6 + 0)-(1 + 0 + 0) = 12 - 1 = \mathbf{11}$$
$$(6 + 7 + 5)-(1 + 2 + 4) = 18 - 7 = \mathbf{11}$$
$$(6 + 8 + 9)-(1 + 0) = 23 - 1 = \mathbf{22}$$

Números primos.

114. Ya hemos visto (III) que se llama *número primo,* aquel que *no es divisible* sino por sí mismo ó por la unidad.

Veamos como podremos formar la presente tabla, que nos dá los *números primos comprendidos entre* 1 y 1000.

Para esto, escribiremos la série natural de los números de 1 á 1000.

En seguida, *tacharemos todos los números pares á excepción del 2.*

A partir de la unidad contaremos de **3** en **3**, tachando todos los números que ocupen el lugar 3º; en seguida contaremos de **5** en **5**, tachando todos los números que ocupen el lugar 5º; de **7** en **7**, de **11** en **11** .... y así sucesivamente.

TABLA DE NÚMEROS PRIMOS

1	59	139	233	337	439	557	653	769	883
2	61	149	239	347	443	563	659	773	887
3	67	151	241	349	449	569	661	787	907
5	71	157	251	353	457	571	671	797	911
7	73	163	257	359	461	577	677	809	919
11	79	167	263	367	463	587	683	811	929
13	83	173	269	373	467	593	691	821	937
17	89	179	271	379	479	599	701	823	941
19	97	181	277	383	487	601	709	827	947
23	101	191	281	389	491	607	719	829	953
29	103	193	283	397	499	613	727	839	967
31	107	197	293	401	503	617	733	853	971
37	109	199	307	409	509	619	739	857	977
41	113	211	311	419	521	631	743	859	983
43	127	223	313	421	523	641	751	863	991
47	131	227	317	431	541	643	757	877	997
53	137	229	331	433	547	647	761	881	—

115. Conviene observar que los números primos *son todos impares excepto el 2.*

116. Se llaman **Factores primos** *ó divisores simples*, todos los números primos *cuyo producto* forma dicho número.

Así, los factores primos del número 30, serán los números primos **2**. **3**, **5** que multiplicados dán 30.

117. Para descomponer un número en sus factores primos *se dividirá el número por 2, el cociente que resulta por* **2**; *el nuveo cociente también por 2 y así sucesivamente hasta que el número deje de ser par, es decir divisible por 2.*

El último cociente que resulta de dividir por 2, se divide por **3**, *hasta que deje el cociente de ser divisible por 3, y así sucesivamente, se sigue dividiendo por* **5**,**7**, **11**, **13**........*es decir por todos los números primos, hasta que el último cociente sea igual á la unidad y el residuo igual á cero. Los diferentes divisores empleados, serán los factores primos en que se ha descompuesto el número dado.*

Ejemplo.—Descompongamos el número 1260 en sus factores primos.

1260	**2**					
00	630	**2**				
	03	315	**3**			
	10	015	105	**3**		
	0	0	015	35	**5**	
			0	0	7	**7**
					0	1

Los *divisores* **2**, **3**, **5**, **7**, serán los factores primos del número dado 1260, el cual se podrá formar multiplicando todos los factores primos, así:

$$1260 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \text{ ó sea}$$
$$1260 = \mathbf{2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7}$$

118. Generalmente, se dispone la operación colo cando el número dado y los sucesivos cocientes á la izquierda de una raya vertical y los divisores ó números primos á la derecha, de la misma raya.

El ejemplo anterior, se dispondría de la siguiente manera:

1260	2
630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

6048	2
3024	2
1512	2
756	2
378	2
189	3
63	3
21	3
7	7
1	

Máximo Común Divisor.

119. Se llama *común divisor*, entre varios números, aquel que está contenido exactamente en los números dados, y **Máximo Común Divisor**, es el *mayor* divisor que divide *exactamente* á los números dados.

Así el *2 y 3 son comunes divisores* de los números 6, 12 y 18, pero el *máximo común divisor* es 6.

La expresión *máximo común divisor* se abrevia por medio de las iniciales M. C. D.

120. Para determinar el *M. C. D.* de *dos* números:

Se divide el mayor por el menor y si la división es exacta, el número menor será el M. C. D.

Si la división es inexacta se divide el primer divisor por el resto obtenido y si la división es exacta, este segundo divisor será el M. C. D.

Si tampoco la división fuera exacta se vuelve á dividir el último divisor por el último residuo y así sucesivamente hasta obtener una división exacta.

En caso de que el último divisor fuera la unidad, es porque los dos números dados son primos entre sí.

EJEMPLOS:

1º Hallar el M. C. D. de los números 80 y 20.

80	20
0	4

El M. C. D. será **20**.

2º Hallar el M. C. D. de los números 480 y 390.

	480	390	*90*	**30** M. C. D.
Cociente		1	**4**	3
Residuo	*90*	30	0	

Luego, **30** será el M. C. D.

3º Hallar el M. C. D. de los números 81 y 20.

	81	20	**1** M. C. D.
Cociente	—	**4**	20
Residuo	1	00	—

Luego, los números dados *son primos* entre sí.

121. Si quisiéramos *determinar el M. C. D. de varios números,* determinaríamos el M. C. D. *de dos de ellos,* en seguida se determina el M. C. D. *del hallado y otro* de los números propuestos y así sucesivamente *hasta* *hallar el último* M. C. D., *que será el de todos* los números dados.

—Así, para determinar el M. C. D. de los números 480; 390; 310; hallaríamos el M. C. D. de 480 y 390 que es **30**. En seguida hallaríamos el de **30** y 310 que sería 10, luego, **10**, *será el M. C. D. de los tres números* propuestos.

122. Vamos á indicar *otro medio* para hallar el M. C. D.; método cuya adopción aconsejamos por su brevedad y dificultad de cometer errores.

Consiste en descomponer los números dados en sus factores primos y en seguida formar el producto de todos los factores primos comunes, con el menor grado de potencia.

Por consiguiente, para hallar el M. C. D. de los números 480 y 390 dispondríamos la operación así

480	**2**	390	**2**
240	2	195	**3**
120	2	65	**5**
60	2	13	13
30	2	1	
15	**3**		
5	**5**		
1			

Luego el M. C. D. estaría formado por el producto **2** × **3** × **5**, *de los factores primos comunes*, es decir será igual á **30**.

—Si se quisiera hallar el M. C. D. de los números 420, 1050 y 1386, se dispondría la operación así

420	**2**	1050	**2**	1386	**2**
210	2	525	**3**	693	**3**
105	**3**	175	5	231	3
35	5	35	5	77	**7**
7	**7**	7	**7**	11	11
1		1		1	

Luego, el M. C. D. estará formado por el producto $2 \times 3 \times 7$, es decir, será **42**.

Mínimo Múltiplo Común.

123. Se llama *múltiplo común* de varios números, *aquel que los contiene á todos* cierto número de veces exactamente y **Mínimo Múltiplo Común** el *menor* múltiplo común de los números dados.

Así, 120 será *múltiplo común* de 3, 4 y 5, pero el *Mínimo Múltiplo Común* sería 60.

La espresión **Mínimo Común Múltiplo**, se abrevia con las iniciales M. C. M.

124. *Para determinar el M. C. M. de dos ó más números*, se descomponen los números en sus factores primos, se multiplican *todos los factores diferentes con la mayor potencia*, y el producto así obtenido sería el M. C. M.

Ejemplos:

1º.—Así el M. C. M. de los números 480 y 390 se obtendría

$$\begin{array}{r|l} 480 & 2 \\ 240 & 2 \\ 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 390 & 2 \\ 195 & 3 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

Descomposición que nos dá:

$$480 = 2^5 \times 3 \times 5$$
$$390 = 2 \times 3 \times 5 \times 13.$$

Luego el M. C. M. sería

$$2^5 \times 3 \times 5 \times 13 = 6240.$$

2º.—El M. C. M. de los números 420; 1050; 1386; se obtendría

420	2	1050	2	1386	2
210	2	525	3	693	3
105	3	175	5	231	3
35	5	35	5	77	7
7	7	7	7	11	11
1		1		1	

Luego, la descomposición nos ha dado:

$$420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$$
$$1050 = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7$$
$$1386 = 2 \times 3^2 \times 7 \times 11$$

y el M. C. M. sería

$$2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11 = 69.300.$$

Ejercicios

—Hallar el M. C. D. de los números

120;	420;	660
5775;	385;	875875
3258;	6534;	5346
252;	2772;	10890

—Hallar el M. C. M. de los mismos números.

CAPÍTULO IV.

NÚMEROS FRACCIONARIOS.

Nociones Preliminares.

125. Ya hemos dicho que *número fraccionario* es el que se compone de una ó *varias partes iguales* de la unidad.

Así, si se considera que la unidad está dividida en *dos partes iguales* se dice que *cada una* de estas partes es *un medio;* si consideramos la unidad dividida en *tres partes* se dice de *cada parte* que es *un tercio,* y así sucesivamente, si consideramos la unidad dividida en 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 *partes iguales* se dice de cada parte, que es, un *cuarto, quinto, sexto, séptimo, octavo, noveno* y *décimo*.

126. Si se considera la unidad dividida en un número mayor de partes, se nombraría agregando al número, la terminación **avos.**

Así, si se considera la unidad dividida en 15, 20... partes, cada parte sería *un quince avos; un veinte avos....*

127. Si queremos expresar que hemos dividido la unidad en *cinco* partes iguales y tomado *tres* de esas partes, diríamos *tres quintos,* que *se escribirá* así

$$\frac{3}{5}$$

es decir, *indicando* una división.

128. Cuando la fracción se escribe *bajo la forma de una división* indicada, se llama **Quebrado**, cuando se escribe *siguiendo la ley de la numeración decimal*, se llama **Fracción Decimal** y cuando las partes en que ha quedado dividida la *unidad principal*, forman á su vez *nuevas unidades* concretas, se llama **Número Complejo**.

129. Como hemos visto, *tres quintos* se escribe

$$\frac{3}{5}$$

El número **5** que está debajo de la raya horizontal, se llama *denominador* y es el que dá *nombre* al quebrado. En este caso es *quinto*.

El número **3** que está sobre de la raya, se llama *numerador*, é indica el *número de* partes que se han tomado.

Los dos números que forman el quebrado, se llaman, *términos del quebrado*.

130. El numerador, puede ser *menor*, *igual* ó *mayor* que el denominador.

En el primer caso, el *quebrado* es **propio**.

Ejemplos:—

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{7}{8}, \quad \frac{3}{20}, \quad \frac{8}{105}$$

En el segundo caso, el *quebrado* es **aparente**.

Ejemplos:—

$$\frac{2}{2}, \quad \frac{7}{7}, \quad \frac{23}{23}, \quad \frac{180}{180}$$

En el tercer caso, el quebrado es **impropio**.

Ejemplos:—

$$\frac{3}{2} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{14}{8} \quad \frac{107}{33}$$

131. Vémos, pues, que el quebrado *propio*, representa un número *menor que la unidad.*

El quebrado *aparente*, representa un número *igual* á la unidad y el quebrado *impropio*, un número *mayor que la unidad.*

Cuando el quebrado tiene por denominador la unidad, ó cuando el *numerador es múltiplo* del denominador, también se le dá el nombre de quebrado *aparente.*

Ejemplos:—

$$\frac{3}{1}, \quad \frac{8}{4}, \quad \frac{125}{5}, \quad \frac{84}{4}$$

132. Se llama **Número Mixto**, *el que está formado por un entero y un quebrado.*

Por ejemplo:—

$$2\frac{3}{4}, \quad 5\frac{6}{7}, \quad 12\frac{4}{5}$$

que se leen *dos* y *tres cuartos*, *cinco* y *seis séptimos*, *doce* y *cuatro quintos*.

133. *Para leer* un quebrado, cuyo numerador ó denominador esté formado por una *operación indicada*, se lee el numerador, se interpone la palabra *sobre* y se lee el denominador.

Así para leer

$$\frac{2+3\times4,}{8}$$

leeríamos *dos, más tres multiplicado por cuatro, sobre ocho.*

134. Se llaman *quebrados homogéneos*, los que tienen *igual denominador*, como

$$\frac{3}{8}, \quad \frac{5}{8}, \quad \frac{10}{8}$$

y quebrados *heterogéneos* los que tienen *distinto denominador*, como

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{5}{8}, \quad \frac{10}{4}$$

135. Para reducir un *entero á quebrado*, basta multiplicar el entero por el número que se toma como denominador y se le pone por denominador el denominador dado.

Ejemplos: Para reducir el número 4 á *quintos*, sería

$$\frac{4 \times 5}{5} = \frac{20}{5}$$

136. Para reducir un *número mixto* á quebrado, basta multiplicar el entero, por el denominador, *agregarle el numerador* y ponerle por denominador el denominador del quebrado.

Ejemplo: Sea reducir á quebrado el *mixto*.

$$3\,\frac{5}{7}$$

aplicando la regla indicada

$$3\,\frac{5}{7} = \frac{3 \times 7 + 5}{7} = \frac{21 + 5}{7} = \frac{26}{7}$$

137. Para *reducir un quebrado impropio á número mixto*, nos bastará dividir el numerador por el denominador y *el cociente* será la parte *entera*.

La *parte fraccionaria*, se obtendrá escribiendo un quebrado, cuyo numerador sea el residuo y cuyo denominador sea el divisor.

Ejemplos:—Reducir á mixto el quebrado impropio

$$\frac{23}{6}$$

Efectuando la división, sale

$$\begin{array}{r|l} 23 & 6 \\ \cline{2-2} 5 & 3 \end{array}$$

luego el número mixto *equivalente* al quebrado impropio, sería

$$\frac{23}{6} = 3\,\frac{5}{6}$$

Propiedades de los Quebrados

138. Los términos de un quebrado pueden ser *modificados* por cualquiera de las cuatro operaciones fundamentales, manifestándose entónces distintas propiedades generales.

1º Si *aumentamos el numerador* de un quebrado se *aumenta el quebrado.*

2º Si *aumentamos el denominador* de un quebrado se *disminuye el quebrado.*

3º Si *disminuimos el numerador, disminuye el quebrado.*

4º Si *disminuimos el denominador, aumenta el quebrado.*

5º Si *se añade un mismo número* á ambos términos del quebrado, *el quebrado aumenta.*

139. De aquí sacamos las siguientes

Consecuencias: *De varios quebrados que tengan igual denominador, será mayor el que tenga mayor numerador.*

Así, en los quebrados

$$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}$$

sería mayor el $\frac{7}{8}$.

—*De varios quebrados que tengan igual numerador, será mayor el que tenga menor denominador.*

Así, de los quebrados

$$\frac{2}{3}, \frac{2}{8}, \frac{2}{15}$$

sería mayor el $\frac{2}{3}$.

140. Veamos ahora, *las variaciones* que sufre un quebrado, cuando se opera sobre los términos del quebrado *con la multiplicación y división.*

1° *Multiplicando el numerador*, se hace *mayor* el quebrado.

2° *Multiplicando el denominador*, se hace *menor* el quebrado.

3° *Dividiendo el numerador*, se hace *menor* el quebrado.

4° *Dividiendo el denominador*, se hace *mayor* el quebrado.

141. De donde se sacan las siguientes

Consecuencias: 1° *Multiplicando ó dividiendo ambos términos* del quebrado por un mismo número, el quebrado *no altera* su valor.

2º *Para hacer un quebrado* 2. 3, 4, 5. . . . . *veces mayor*, se *multiplica* por 2, 3, 4, 5, ... el numerador *ó se divide* el denominador.

2º *Para hacer un quebrado* 2, 3, 4, 5. . . . . *veces menor, se divide* por 2, 3, 4, 5, . . . el numerador ó se *multiplica* el denominador.

Simplificación de Quebrados.

142. *Simplificar un quebrado, es reducirlo á otro que tenga el mismo valor, ó sea equivalente y que sus términos sean menores.*

Cuando los términos del quebrado no se pueden reducir más, se dice que el quebrado propuesto *se ha reducido á su menor expresión.*

143. Para simplificar los quebrados nos basaremos en el principio establecido (141) de que: *dividiendo ambos términos del quebrado por un mismo número, no se altera su valor.*

Así, *si dividimos* ambos términos del quebrado $\frac{4}{8}$ por 2, *no se alterará su valor* y tendremos:

$$\frac{4}{8} = \frac{2}{4}$$

siendo $\frac{2}{4}$ el quebrado *simplificado.*

144. Si volvemos á dividir por 2, tendremos

$$\frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

siendo $\frac{1}{2}$ la *menor expresión* del quebrado $\frac{4}{8}$, pues ya no es posible simplificarlo más, *por no tener común divisor* los términos del quebrado.

145. De aquí sacamos la consecuencia, que *un quebrado estará reducido á su menor expresión cuando sus dos términos sean primos entre sí.*

146. De donde deducimos también que:

Para hallar la menor expresión de un quebrado, nos bastará determinar el M. C. D. de los dos términos del quebrado y dividir esos dos términos por el M. C. D. hallado.

Ejemplo:

Reducir á su *menor expresión* el quebrado $\frac{18}{210}$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

de donde

$$\frac{18}{210} = \frac{2 \times 3 \times 3}{2 \times 3 \times 5 \times 7} = \frac{6 \times 3}{6 \times 5 \times 7} =$$

$$= \frac{3}{5 \times 7} = \frac{3}{35}$$

147. Si ambos términos del quebrado *terminan en ceros*, se suprimen *inmediatamente los ceros comunes* y en seguida se procede como ántes.

Ejemplo:

Reducir á su menor expresión el quebrado

$$\frac{210}{990}$$

sería lo mismo que reducir á su menor expresión el quebrado

$$\frac{21}{99}$$

de donde

$$\begin{array}{r|l} 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 99 & 3 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

ó bien

$$\frac{210}{990}=\frac{21}{99}=\frac{3\times 7}{3\times 3\times 11}=\frac{7}{3\times 11}=\frac{7}{33}$$

Reducción de los Quebrados á un Común Denominador.

148. La reducción de los quebrados á un *común denominador*, *tiene por objeto identificar* su especie para poder *sumarlos, restarlos y compararlos*. Así que, los quebrados que tienen un denominador común, pueden considerarse como números concretos cuya *especie* está determinada por el denominador.

149. *Para reducir dos ó más quebrados, se multiplican sus dos términos* **(141)** *por el producto de los demás denominadores*.

Ejemplo:—Redúzcanse á común denominador los quebrados

$$\frac{2}{3},\ \frac{4}{5},\ \frac{6}{7}$$

Tendremos

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 5 \times 7}{3 \times 5 \times 7} = \frac{70}{105}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 3 \times 7}{5 \times 3 \times 7} = \frac{84}{105}$$

$$\frac{6}{7} = \frac{6 \times 3 \times 5}{7 \times 3 \times 5} = \frac{90}{105}$$

Aquí tendremos nuevos quebrados

$$\frac{70}{105}, \quad \frac{84}{105}, \quad \frac{90}{105}$$

equivalentes á

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{7}{6}$$

y que tiene el *común denominador* **105**.

150. En la práctica se abrevia esta operación, multiplicando el numerador de cada quebrado por el producto de los demás denominadores, y formando una sola vez *el producto de todos los denominadores*.

151. *Antes de reducir* varios quebrados á un común denominador, deberán reducirse los quebrados, á su *menor expresión*.

152. Este procedimiento tiene el inconveniente de *no darnos siempre el menor común denominador*, por cuyo motivo indicaremos otro método, por el cual se obtiene ese resultado.

Para esto, *después de tener reducidos los quebrados á su menor expresión, se determina el M. C. M.* (123) *de todos los denominadores, después se multiplica el numerador de cada quebrado por el cociente que resulta de* *dividir el M. C. M., por cada divisor, y el denominador común será el M. C. M.*

Ejemplo:—Reducir á un **mínimo** *común denominador* los quebrados

$$\frac{6}{16}, \frac{15}{42}, \frac{35}{110}$$

que reducidos á su *menor expresión* serán

$$\frac{3}{8}, \frac{5}{14}, \frac{7}{22}$$

y descomponiendo los denominadores

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \\ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 22 & 2 \\ 11 & 11 \\ 1 & \\ & \end{array}$$

luego el M. C. M. de los tres denominadores será

$$2^3 \times 7 \times 11 = 8 \times 7 \times 11 = \mathbf{616}$$

Entonces la reducción sería según la regla

$$\frac{2}{8} = 3 \times \frac{(616 : 8)}{616} = \frac{3 \times 77}{616} = \frac{231}{616}$$

$$\frac{5}{14} = 5 \times \frac{(616 : 14)}{616} = \frac{5 \times 44}{616} = \frac{220}{616}$$

$$\frac{7}{22} = 7 \times \frac{(616 : 22)}{616} = \frac{7 \times 28}{616} = \frac{196}{616}$$

153. Para *comparar* entre sí varios quebrados, *es necesario reducirlos previamente* á un común denominador.

154. Para dar *á un entero la forma aparente* de quebrado, bastará *ponerle por denominador la unidad.*

OPERACIONES FUNDAMENTALES DE LOS QUEBRADOS

Adición

155. En la *adición de los quebrados*, pueden suceder *cuatro* casos.

1º *Sumar quebrados que tengan denominador común.*
2º *Sumar quebrados que tengan distinto denominador.*
3º *Sumar enteros y quebrados.*
4º *Sumar números mixtos.*

156. 1er *Caso.—Si los quebrados tienen igual denominador, se suman los numeradores y se pone por denominador el denominador común.*

Ejemplo: Súmense los quebrados

$$\frac{2}{8}+\frac{3}{8}+\frac{5}{8}$$

Se tendría

$$\frac{2}{8}+\frac{3}{8}+\frac{5}{8}=\frac{2+3+5}{8}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}=1+\frac{1}{4}$$

ó sea

$$\frac{2}{8}+\frac{3}{8}+\frac{5}{8}=1\,\frac{1}{4}$$

157. 2º *Caso.—Si los quebrados tienen distinto denominador, se reducen préviamente á quebrados que tengan común denominador, y en seguida se procede como en el caso anterior.*

Ejemplo:—Súmense los quebrados

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}$$

Se tendria

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} =$$

$$\frac{2 \times 5 \times 7}{3 \times 5 \times 7} + \frac{4 \times 3 \times 7}{3 \times 5 \times 7} + \frac{6 \times 3 \times 5}{3 \times 5 \times 7}$$

ó bién

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} = \frac{70}{\mathbf{105}} + \frac{84}{\mathbf{105}} + \frac{90}{\mathbf{105}} = \frac{\mathbf{70 + 84 + 90}}{105}$$

ó sea

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} = \frac{244}{105}$$

y reduciendo

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} = 2 + \frac{34}{105} = 2\ \frac{34}{105}$$

158. 3[er] *Caso.—Para sumar un entero y un quebrado, nos bastará escribir un número mixto, cuya parte entera seria el número entero propuesto y cuyo quebrado, seria el quebrado dado.*

Ejemplo:—Tengamos que sumar $3 + \frac{1}{5}$ que *se podria reducir* (**136**) *á quebrado impropio.*

$$3 + \frac{1}{5} = \frac{3 \times 5 + 1}{5} = \frac{16}{5} = 3\ \frac{1}{5}$$

159. 4° *Caso. — Para sumar números mixtos, se suman primeramente los quebrados, se les saca la parte entera si la tienen, y ésta se agrega á la suma de los enteros.*

Ejemplo:

$$2\frac{3}{4} + 3\frac{4}{5} + 8\frac{1}{2}$$

Se dispondría así la operación

$$2\frac{3}{4} + 3\frac{4}{5} + 8\frac{1}{2} = \left(\frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{1}{2}\right) + 2 + 3 + 8$$

pero

$$\frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{1}{2} = \frac{30}{40} + \frac{32}{40} + \frac{20}{40} = \frac{15}{20} + \frac{16}{20} + \frac{10}{20}$$

ó sea

$$\frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{1}{2} = \frac{15 + 16 + 10}{20} = \frac{41}{20} = 2\frac{1}{20}$$

luego, la primera expresión sería

$$2\frac{3}{4} + 3\frac{4}{5} + 8\frac{1}{2} = 2\frac{1}{20} + 2 + 3 + 8 =$$

$$= 2\frac{1}{20} + 13 = \mathbf{15\frac{1}{20}}$$

160. También se pueden *sumar los números mixtos, reduciéndolos primeramente á quebrados y sumándolos después según la regla general.*

Ejemplo:

$$2\,\frac{3}{4} + 3\,\frac{4}{5} + 8\,\frac{1}{2}$$

Reduciéndolos á quebrados serían

$$2\,\frac{3}{4} + 3\,\frac{4}{5} + 8\,\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{2 \times 4 + 3}{4} + \frac{3 \times 5 + 4}{5} + \frac{8 \times 2 + 1}{2}$$

$$= \frac{8 + 3}{4} + \frac{15 + 4}{5} + \frac{16 + 1}{2} = \frac{11}{4} + \frac{19}{5} + \frac{17}{2}$$

y reduciendo á común denominador esta última expresión

$$2\,\frac{3}{4} + 3\,\frac{4}{5} + 8\,\frac{1}{2} = \frac{110}{40} + \frac{152}{40} + \frac{340}{40} =$$

$$= \frac{55}{20} + \frac{76}{20} + \frac{170}{20}$$

ó sea

$$2\,\frac{3}{4} + 3\,\frac{4}{5} + 8\,\frac{1}{2} = \frac{55 + 76 + 170}{20} = \frac{301}{20}$$

ó bién

$$2\,\frac{3}{4} + 3\,\frac{4}{5} + 8\,\frac{1}{2} = 15\,\frac{1}{20}$$

resultado idéntico al anterior (159).

Ejercicios

$$\frac{2}{5}+\frac{4}{5}+\frac{7}{5} \qquad 4+\frac{6}{7}+9$$

$$\frac{3}{4}+\frac{6}{7}+\frac{4}{9} \qquad 2\frac{3}{4}+7\frac{8}{9}+5\frac{4}{7}$$

$$7+\frac{3}{4}+\frac{8}{11} \qquad 6+\frac{3}{8}+2\frac{3}{5}$$

Problemas

1° Habiendo un individuo trabajado $\frac{2}{3}$ de hora el primer día, $\frac{3}{4}$ de hora el segundo día y $\frac{1}{5}$ el tercer día. ¿Cuánto habrá trabajado en los tres días.

2° Habiéndose comprado tres lotes de terreno, compuesto el primero de $\frac{2}{5}$ de cuadra; el segundo de $3\frac{1}{4}$ y el tercero de $6\frac{1}{5}$, deseo saber cuántas cuadras se han comprado en todo.

Sustracción.

161. En la *sustracción de quebrados*, pueden también presentarse *cuatro* casos.

1° *Que los quebrados tengan común denominador.*
2° *Que los quebrados tengan denominador distinto.*
3° *Restar de un entero un quebrado.*
4° *Restar números mixtos*

162. 1er *Caso.—Si los quebrados tienen denominador común, se restan los numeradores y se les pone por denominador, el denominador común.*

Ejemplo: Réstese $\frac{3}{8}$ de $\frac{5}{8}$

$$\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{5-3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

163. 2° *Caso.—Si los quebrados tienen distinto denominador, se reducen préviamente á denominador común y después, se procede como en el caso anterior.*

Ejemplo: Réstese $\frac{2}{5}$ de $\frac{8}{9}$

$$\frac{8}{9} - \frac{2}{5} = \frac{40}{45} - \frac{18}{45} = \frac{40-18}{45} = \mathbf{\frac{22}{45}}$$

164. 3er. *Caso.—Para restar un quebrado de un entero, se reduce el entero á quebrado y después se resta como en el 1er caso.*

Ejemplo: Réstese $\frac{2}{3}$ de 5.

$$5 - \frac{2}{3} = \frac{15}{3} - \frac{2}{3} = \frac{15-2}{3} = \frac{13}{3}$$

ó bién

$$5 - \frac{2}{3} = 4\,\frac{1}{3}$$

165. 4° *Caso.—Para restar números mixtos, se restan separadamente entre sí los enteros y entre sí los quebrados y la reunión de estos dos restos formarán la diferencia.*

Ejemplo: Restar $2\,\frac{2}{3}$ de $5\,\frac{3}{4}$

$$5\frac{3}{4}-2\frac{2}{3}=(5-2)+\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)=$$

$$=(5-2)+\left(\frac{9}{12}-\frac{8}{12}\right)$$

ó bién

$$5\frac{3}{4}-2\frac{2}{3}=3+\frac{1}{12}=3\,\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{21}}$$

166. *Si al restar números mixtos, el quebrado del minuendo fuera menor que el del sustraendo, se le quita á la parte entera del minuendo una unidad, que se agrega en forma de quebrado, al quebrado del mismo minuendo, teniéndose de ese modo un quebrado, que será mayor que el del sustraendo, con lo cual ya estaremos en el caso anterior.*

Ejemplo:

$$6\,\frac{2}{5}-2\,\frac{3}{4}=5\,\frac{7}{5}-2\,\frac{3}{4}=5-2+\left(\frac{7}{5}-\frac{3}{4}\right)$$

$$=3+\left(\frac{28}{20}-\frac{15}{20}\right)=3+\left(\frac{28-15}{20}\right)$$

ó sea

$$6\,\frac{2}{5}-2\,\frac{3}{4}=3\,\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{20}}$$

167. Siempre que se presente el caso anterior, será más conveniente, *reducir primeramente los mixtos á quebrados y después restarlos como en el 2º Caso.*

Ejemplo:

$$5\,\frac{3}{4} - 2\,\frac{3}{5} = \frac{23}{4} - \frac{13}{5} = \frac{115}{20} - \frac{52}{20} = \frac{115 - 52}{20}$$

$$= \frac{63}{20} = 3\,\frac{3}{20}$$

Ejercicios

$\frac{4}{5} - \frac{2}{7}$	$\left(8 + \frac{3}{4}\right) - \frac{5}{9}$
$\frac{2}{3} - \frac{3}{5}$	$\left(\frac{3}{4} + \frac{6}{7}\right) - \frac{5}{6}$
$6 - \frac{7}{8}$	$6\,\frac{3}{4} - 4\,\frac{7}{18}$

Problemas.

1°—Teniendo $\frac{7}{8}$ de vara de paño, se han vendido $\frac{3}{4}$ de vara ¿Cuánto quedará?

2°—Habiendo trabajado un obrero 3 días y $\frac{1}{5}$ y otro obrero 2 días y $\frac{3}{4}$, ¿cuanto habrá trabajado más, el primero que el segundo?

3°—Cuando nació Juan, Pedro tenía 8 años y $\frac{1}{2}$. Siendo actualmente la edad de Juan de 7 años y $\frac{3}{4}$, deseo saber cuántos años más tiene Pedro que su amigo José, él que tiene 11 años y $\frac{1}{5}$

Multiplicación.

168. En la *multiplicación de quebrados*, pueden presentarse *tres casos*.

1º—*Multiplicar dos quebrados entre sí.*

2º—*Multiplicar un entero por un quebrado.*

3º—*Multiplicar números mixtos.*

169. 1er *Caso.—Para multiplicar un quebrado por otro, bastará multiplicar entre sí los numeradores, y entre sí los denominadores, formándose así, el numerador y el denominador del quebrado producto.*

Ejemplo:

$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{2 \times 3}{5 \times 7} = \frac{6}{35}$$

170. *Si los factores fueran varios se procedería del mismo modo.*

Ejemplo:

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} = \frac{2 \times 4 \times 6}{3 \times 5 \times 7} = \frac{48}{105}$$

171. Sucede á veces, que se presentan quebrados, con el numerador y el denominador *compuestos* de varios números, ligados entre sí por el signo de multiplicación, en cuyo caso, *habiendo el mismo número en ambos términos* del quebrado, se puede suprimir, sin que el quebrado altere su valor.

Ejemplo:

$$\frac{2 \times 8 \times 5 \times 3}{3 \times 6 \times 7 \times 9} = \frac{2 \times 8 \times 5}{6 \times 7 \times 9} = \frac{80}{378}$$

172. 2º *Caso.—Para multiplicar un quebrado por un entero, basta multiplicar* (115) *el entero por el numerador del quebrado, y á ese producto ponerle por denominador el del quebrado.*

Ejemplo:

$$\frac{3}{4} \times 7 = \frac{3 \times 7}{4} = \frac{21}{4} = 5\,\frac{1}{4}$$

173. 3er *Caso.—Para multiplicar números mixtos entre sí, bastará reducir los mixtos á quebrados y en seguida proceder como en el* 1er caso.

Ejemplo:

$$2\,\frac{3}{4} \times 5\,\frac{7}{8} = \frac{2 \times 4 + 3}{4} \times \frac{5 \times 8 + 7}{8}$$

$$= \frac{8 + 3}{4} \times \frac{40 + 7}{8} = \frac{11}{4} \times \frac{47}{8}$$

luego

$$\left(2\,\frac{3}{4} \times 5\,\frac{7}{8} = \frac{11 \times 47}{4 \times 8} = \frac{517}{32} = 16\,\frac{5}{32}\right)$$

174. Si hubiese que *multiplicar un mixto por un entero, reduciríamos préviamente el mixto á quebrado* y después procederíamos como en el *segundo caso.*

Ejemplo:

$$2\,\frac{3}{7} \times 8 = \frac{2 \times 7 + 3}{7} \times 8 = \frac{14 + 3}{7} \times 8$$

$$2\,\frac{3}{7} \times 8 = \frac{17}{7} \times 8 = \frac{136}{7} = 19\,\frac{3}{7}$$

EJERCICIOS

$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$	$\frac{6}{13} \times 8$	$2\frac{3}{4} \times 8\frac{5}{7}$	$3\frac{5}{11} \times 8$
$\frac{6}{7} \times \frac{1}{3}$	$\frac{3}{5} \times 16$	$3\frac{4}{12} \times 7\frac{6}{9}$	$2 \times 3\frac{9}{18}$
$\frac{5}{7} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{8}$	$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times 7$	$2\frac{6}{8} \times 3\frac{4}{5} \times 2\frac{1}{3}$	$8 \times \frac{2}{3} \times 3\frac{5}{7}$

PROBLEMAS

1° En una hora, un peón hace $\frac{2}{3}$ de metros de escavación. ¿Cuánto hará en $\frac{3}{4}$ de hora?

2° Un individuo pagó los $\frac{3}{4}$ de 3280 $ por un terreno. ¿Cuántos pesos le habrán quedado?

3° Un individuo que tenía 7 majadas de 800 ovejas cada una vendió los $\frac{2}{5}$ del total, á razón de $ 5 $\frac{2}{3}$. ¿Cuánto dinero habrá sacado?

División.

175. En la *división de quebrados* pueden presentarse *cuatro* casos.

1° *Dividir un quebrado por otro.*

2° *Dividir un quebrado por un entero.*

3° *Dividir un entero por un quebrado.*

4° *Dividir números mixtos.*

176. *Primer caso.—Para dividir un quebrado por otro se multiplica el numerador del quebrado dividiendo por el denominador del quebrado divisor y en* *seguida el numerador del quebrado divisor, por el denominador del quebrado dividiendo. El primer producto constituirá el numerador del quebrado cociente y el segundo producto su denominador.*

Para facilitar más, la retención de esta regla, puede decirse abusivamente, que *se multiplican en cruz los cuatro términos del quebrado.*

Ejemplo:—

$$\frac{3}{4} : \frac{7}{8}$$

$$\frac{3}{4} : \frac{7}{8} = \frac{3 \times 8}{4 \times 7} = \frac{24}{28} = \frac{6}{7}$$

177. Puede también procederse de la siguiente manera:

Invertir el quebrado divisor y después multiplicar entre sí los numeradores y entre sí los denominadores.

Ejemplo:

$$\frac{2}{3} : \frac{7}{8}$$

$$\frac{3}{4} : \frac{7}{8} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{7} = \frac{3 \times 8}{4 \times 7} = \frac{24}{28} = \frac{6}{7}$$

178. *Segundo caso.—Para dividir un quebrado por un entero, se pone en el quebrado cociente, como numerador, el del quebrado dividendo y por denominador el producto del denominador del quebrado dividendo por el entero* (115).

Ejemplo:

$$\frac{6}{7} : 3$$

$$\frac{6}{7} : 3 = \frac{6}{7 \times 3} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

—*Para facilitar* la retención de esta regla puede *darse al entero divisor, la forma aparente de quebrado*, poniéndole por denominador la unidad, con lo cual no se altera su valor, (62) y después dividir como en el primer caso.

Ejemplo:

$$\frac{6}{7} : 3$$

sería

$$\frac{6}{7} : 3 = \frac{6}{7} : \frac{3}{1} = \frac{6 \times 1}{7 \times 3} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

179. *En caso de que el numerador del quebrado fuera divisible por el entero,* bastará dividir el numerador por el entero y poner *el mismo* denominador.

Ejemplo:

$$\frac{8}{15} : 4$$

$$\frac{8}{15} : 4 = \frac{8 : 4}{15} = \frac{2}{15}$$

180. *Tercer caso.—Para dividir un entero por un quebrado, bastará multiplicar el entero por el denomi-*

nador del quebrado y este producto será el numerador del quebrado cociente, cuyo denominador será el numerador del quebrado divisor.

Ejemplo:

$$8 : \frac{3}{5}$$

$$8 : \frac{3}{5} = \frac{8 \times 5}{3} = \frac{40}{3} = 13\ \frac{1}{3}$$

181. Para recordar esta regla, *bastará dar al entero la forma aparente de quebrado y dividir* como se dividen los quebrados.

Ejemplo:

$$8 : \frac{3}{5}$$

$$8 : \frac{3}{5} = \frac{8}{1} : \frac{3}{5} = \frac{8 \times 5}{1 \times 3} = \frac{40}{3} = 13\ \frac{1}{3}$$

182. Debe observarse, que *siempre* que se presente el *tercer caso*, es decir:, *dividir un entero por un quebrado*, el cociente *será mayor* que el dividendo.

183. *Cuarto caso.—Para dividir un número mixto por otro, se reducen los mixtos á quebrados y se dividen como se indica en el primer caso.*

Ejemplo:

$$2\ \frac{3}{4} : 7\ \frac{2}{5}$$

$$2\ \frac{3}{4} : 7\ \frac{2}{5} = \frac{2 \times 4 + 3}{4} : \frac{7 \times 5 + 2}{5} =$$

$$= \frac{8 + 3}{4} : \frac{35 + 2}{5} = \frac{11}{4} : \frac{37}{5}$$

$$2\,\frac{3}{4} : 7\,\frac{2}{5} = \frac{11}{4} : \frac{37}{5} = \frac{5 \times 11}{4 \times 37} = \frac{55}{148}$$

Ejercicios

$\frac{3}{5} : \frac{4}{7}$	$\frac{8}{9} : 7$	$8 : \frac{4}{5}$	$5\,\frac{8}{9} : \frac{3}{7}$
$\frac{2}{11} : \frac{4}{9}$	$\frac{3}{5} : 14$	$15 : \frac{1}{2}$	$6\,\frac{4}{5} : 3\,\frac{2}{11}$
$\frac{1}{4} : \frac{2}{8}$	$\frac{2}{7} : 3$	$7 : \frac{7}{12}$	$2\,\frac{7}{8} : 5\,\frac{3}{4}$

Problemas

1ro ¿Cuál es el número que multipicado por $\frac{2}{3}$ dá $\frac{8}{21}$?

2do Ocho individuos compraron $\frac{3}{5}$ de un billete de lotería. Si saliera premiado dicho número qué parte le tocaría á cada uno?

3ro Si un tren ha recorrido 25 kilómetros en $\frac{3}{4}$ de hora, cuánto recorrerá en una hora?

4to Habiendo tardado un tren 3 horas y $\frac{2}{5}$ en recorrer 103 kilómetros y $\frac{2}{15}$, deseo saber cuál habrá sido la marcha por hora?

Quebrado de Quebrado

184. Se llama *Quebrado de Quebrado el número que expresa partes iguales de un quebrado simple.*

Así $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$, representa los *dos tercios* del quebrado simple $\frac{3}{4}$.

185. Las *operaciones fundamentales* con los *quebrados de quebrados* se hacen *como con los quebrados simples*, siempre que se hayan *préviamente reducido* á quebrados simples.

186. *Para reducir quebrados de quebrados á quebrados simples, bastará multiplicar entre sí todos los numeradores y entre sí todos los denominadores.*

Ejemplo:—

$$\frac{2}{3} \text{ de } \frac{7}{8} \text{ de } \frac{4}{5} =$$

$$\frac{2}{3} \text{ de } \frac{7}{8} \text{ de } \frac{4}{5} = \frac{2 \times 7 \times 4}{3 \times 8 \times 5} = \frac{56}{120} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$$

Problemas

Luis, Pedro y José salieron á cazar, llevando el 1°, 349; el 2° 270 y el 3°, 300 cartuchos.

Luis gastó los $\frac{2}{5}$ de los que llevaba, Pedro $\frac{1}{3}$ y José los $\frac{3}{4}$. Los $\frac{2}{11}$ de los tiros no dieron en el blanco.

Cada cartucho contenía 80 municiones, de las que solo dieron en el blanco los $\frac{2}{5}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{2}$, correspondiendo á cada munición un pájaro, que se vendieron á 1 centavo y $\frac{3}{4}$ cada uno.

Del importe de la venta se dedujeron 1231 centésimos y $\frac{1}{2}$, repartiéndose el resto entre los tres amigos. ¿Cuánto tocó á cada uno?

Potencias y raíces.

187. *Para elevar un quebrado á una potencia cualquiera, basta elevar á la potencia indicada, ambos términos del quebrado.*

Ejemplo:

$$\left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{8^2}{9^2} = \frac{64}{91}$$

188. Si se tratara de un *número mixto*, se reduciría el mixto á *quebrado* y se procedería como antes.

Ejemplo:

$$\left(2\,\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{11}{4}\right)^2 = \frac{11^2}{4^2} = \frac{121}{16} = 7\,\frac{9}{16}$$

189. *Para extraer una raíz cualquiera de un quebrado, basta extraer la raíz indicada de ambos términos del quebrado.*

Ejemplo:

$$\sqrt{\frac{9}{64}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{64}} = \frac{3}{8}$$

190. Si se tratara de un *número mixto*, se reduce previamente á *quebrado* y en seguida se procede como antes.

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{5\,\frac{23}{64}} = \sqrt[3]{\frac{343}{64}} = \frac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{7}{4} = 1\,\frac{3}{4}$$

191. Si se tratara de quebrados cuyos términos no son cuadrados perfectos, *se reducen* préviamente á *fracción decimal*, y en seguida se procederá como indicaremos al tratar los *números decimales*.

CAPÍTULO V.

NUMEROS DECIMALES

Preliminares.

192. Hemos estudiado en el capítulo anterior los quebrados *en general*, y pasaremos á estudiar ahora, los *quebrados ó fracciones decimales*, que son aquellas fracciones, *cuyo denominador es diez ó un múltiplo de diez*.

193. De manera, que podremos decir que, **fracción decimal**, *es una fracción que tiene por denominador la unidad seguida de ceros*.

Así:

$$\frac{3}{10}, \quad \frac{5}{100}, \quad \frac{27}{1000}, \quad \frac{84}{10000}$$

son *fracciones decimales*.

194. Luego podemos decir también, que *fracción decimal, es una ó varias partes de la unidad que se considera dividida en diez, cien, mil*.... partes iguales.

195. Cuando se divide la unidad en **10** partes iguales, cada parte se llama *décima*, si se considera dividido en **100**, *céntesima;* si en **1000**, *milésima* y así sucesivamente.

196. Vemos, que las fracciones decimales se ván formando lo mismo que se formaron los números enteros, pero en un *sentido inverso.* Las unidades de cada orden de los *números enteros, se formaban* por el sucesivo *producto* de la unidad por *diez* y las fracciones decimales *se forman* por el sucesivo *cociente* de la unidad por *diez.*

En los enteros las unidades de cada orden van siendo cada vez *diez veces mayores* y en las *fracciones decimales*, son cada vez, *diez veces menores.*

197. Observaremos que á cada unidad de un orden cualquiera, corresponde una unidad—del mismo orden—*decimal.* Así, á las unidades *diez veces mayores* que la *unidad*, corresponde otra *diez veces menor;* á la *cien veces mayor*, corresponde otra *cien veces menor*...... ó sea, á las *decenas*, corresponden las *décimas*, á las *centenas* las *centésimas*, etc., que como vemos, se nombran como las unidades de 1º, 2º, 3º y 4º orden, sin más que agregarle la terminación *ecima.* Es decir las unidades de 1º, 2º, 3º, 4º orden *decimal* se nombrarían *décimas, centésimas, milésimas, diez milésimas*.....

Tabla que demuestra la progresión de los Números Decimales.

ASCENDENTE	
Billones	13º
Centenas de Millar de Millones	12º
Decenas » » »	11º
Millares de Millones	10º
Centenas » »	9º
Decenas » »	8º
Millones	7º
Centenas de Millar	6º
Decenas » »	5º
Millares	4º
Centenas	3º
Decenas	2º
Unidades	**1º**
DESCENDENTE	
Décimas	2º
Centésimas	3º
Milésimas	4º
Diezmilésimas	5º
Cienmilésimas	6º
Millonésimas	7º
Diezmillonésimas	8º
Cienmillonésimas	9º
Milmillonésimas	10º
Diezmilmillonésimas	11º
Cienmilmillonésimas	12º
Billonésimas	13º

198. De lo dicho se deduce, que del mismo modo que cuando se trató de los números enteros, cada cifra colocada á la *izquierda* de otra, representaba unidades del órden *inmediato superior:* así tambien, toda cifra colocada á la *derecha*, representa unidades del órden *inmediato inferior*.

Por ejemplo, si quisiéramos espresar el número *386 unidades y 3 décimas*, nos bastaría agregar el **3** á continuación del 6.

unidades

3863

y tendríamos que el 3 representa unidades del órden *inmediato inferior* al 6, es decir, representa *décimas.*

199. Como sería muy molesto escribir la palabra *unidades*, para indicar *dónde termina la parte entera* del número, se ha convenido en separar por medio de una *coma*, la parte entera, de la fraccionaria y entonces, el número anterior se escribiría

386,3.

200. El número así formado, por una parte entera y una fraccionaria, se llama **número Decimal**, llamándose *fracción decimal*, al número que *no tiene* parte entera.

201. *En caso de no existir parte entera*, se escribirá *un cero*, en seguida la *coma* y á continuación el ó los guarismos que expresan la fracción decimal.

Así, para escribir *7 décimas*, escribiríamos

0,7

202. En caso que se nos diera *5 centésimas*, veríamos que este número no tiene parte entera ni décimas, luego *reemplazaríamos* esos guarismos con ceros.

Escribiríamos

0,05, es decir, *cero* enteros, *cero* décimas y *cinco* centésimas.

Si tuviéramos que escribir el número *cuarenta y tres unidades y ocho milésimas*, escribiríamos

43,008

203. En general; siempre que tengamos que *escribir* una fracción decimal, *para conocer cuantas cifras decimales* tendrá el número, nos bastará con la mente imaginar la unidad del órden *ascendente* correspondiente á la fracción dada y esta fracción, tendrá tantas cifras decimales *como ceros* tiene la unidad del órden ascendente correspondiente.

Así, para expresar *milésimas*, vemos que la fracción deberá tener *tres* cifras, porque el número *mil* tiene *tres ceros*.

Para expresar *cien milésimas*, la fracción deberá tener *cinco* cifras, porque el número *cien mil* tiene *cinco ceros*.

Ejemplo:

1º—Escribir 38 *cienmilésimas*

0,00038

2º—Escribir 28 unidades y 7 *diezmilésimas*

28,0007

204. Para *enunciar ó leer* números decimales, puede procederse de tres maneras distintas:

1º—Se lee la parte entera y en seguida, *cada cifra decimal* con su propia denominación.

Ejemplo: Leer

37,426

Se leería *treinta y siete unidades, cuatro décimas, dos centésimas y seis milésimas.*

2º—Leer la parte entera y despues *toda la parte decimal* poniéndole la denominación del órden decimal inferior.

Ejemplo: Leer

37,426

Diríamos: *Treinta y siete unidades y cuatrocientos veinte y seis milesimas.*

3º—Leer *todo el número* como si fuera entero y agregarle *al fin*, la denominación del número decimal de órden inferior.

Ejemplo: Leer

37,426

Se leería: *Treinta y siete mil cuatrocientos veinte y seis milésimas.*

205. De todo lo expuesto se deducen las siguientes

Propiedades de los Decimales

1ª—*No se altera el valor de un número decimal, añadiendo ó quitando á su derecha, un número cualquiera de ceros.*

Ejemplos.

1º $3{,}45 = 3{,}45\mathbf{0} = 3{,}45\mathbf{00} = 3{,}45\mathbf{000}$.
2º $36{,}85000 = 36{,}85\mathbf{00} = 36{,}85\mathbf{0} = 36{,}85$.

2ª—*Para hacer un número decimal* **10, 100, 1000**.... *veces mayor, es decir, para multiplicarlo por* 10, 100, 1000....., *basta trasladar la coma á la derecha, tantos órdenes como ceros tiene el multiplicador.*

Ejemplos:

1.º $23{,}57 \times 10 = 235{,}7$
2.º $0{,}3785 \times 100 = 37{,}85$
3.º $485{,}679 \times 100 = 48567{,}9$
4.º $7{,}645 \times 1000 = 7645$
5.º $25{,}868 \times 10000 = 25868\mathbf{0}$

3.ª—*Para hacer un número decimal* **10, 100, 1000...** *veces menor, es decir, para dividirlo por 10, 100, 1000......., basta trasladar la coma á la izquierda tantos órdenes como ceros tiene el divisor.*

Ejemplos:

1.º	36,5	:	10 =	3,65
2.º	1458,23	:	100 =	14,5823
3.º	0,345	:	100 =	**0,00**345
4.º	7856	:	1000 =	7,856
5.º	368	:	10,000 =	**0,0**368

206.—*Debemos observar* que cuando el número que se trata de hacer 10, 100, 1000....... veces menor, *es entero* (ejemp. 4º) basta separar con una *coma* tantas cifras á la derecha como ceros tiene el divisor, y que *si el número que se trata de hacer* 10, 100, 1000....... *veces menor no tiene cifras suficientes* (ejemp. 3º y 5º), se pondrán *tantos ceros á la izquierda* como requiera la operación.

Operaciones Fundamentales de los Números Decimales.

Adición.

207. *Los números y fracciones decimales se suman lo mismo que los enteros, teniendo la precaución de colocar los sumandos los unos debajo de los otros, de modo que las unidades de un mismo orden se correspondan en columnas verticales. Hecha la suma se se-*

pararán, á la derecha, tantas cifras como haya en el sumando que tenga más.

Ejemplo:

Sumemos 348,631 + 74,649 + 0.37 + 485.

```
348,631
 74,649
  0,37
485
-------
908,650
```

208. *Para tener mayor seguridad* en la suma, suele igualarse por medio de ceros á la derecha, el número de cifras decimales.

Ejemplo:

Sumemos 36,728 + 0,64 + 8,6354.

```
36,7280
 0,6400
 8,6354
-------
46,0034
```

Ejercicios

Sumar: 387,45 + 763,204 + 8.
31,456 + 8,6003 + 0,0005.
4,568 + 35,00000 + 21,38 + 0,4568.

Problemas.

1°—Habiendo pagado $ 148,67 por gastos de almacen, $ 39,75 al carnicero y restando un sobrante de $ 176,48, deseo saber cuanto dinero había en caja, antes de hacer los pagos.

2°—En una casa de tres pisos tiene el primero 5,m 476 de alto, el segundo 4,895 y el tercero 4,05.—Deseo saber cual es la altura de la casa.

3°—Teniendo un almacenero tres bolsas de arroz, conteniendo la primera kg. 34.687; la segunda kg. 26,43 y la tercera kg. 81,006, deseo saber cuántos kilogramos de arroz contienen las tres bolsas.

Sustracción.

209. *Para restar números decimales, bastará colocar el sustraendo debajo del minuendo, de manera que se correspondan las unidades del mismo orden y después, se restan como si fuesen enteros, teniendo cuidado de que la coma de la diferencia esté en columna con la coma del minuendo y sustraendo.*

Ejemplo: *Réstese* 46,3005 de 187,4008

$$\begin{array}{r} 187,4008 \\ 46,3005 \\ \hline 141,1003 \end{array}$$

Ejercicios

1° 481,649 — 36,753

2° 34,645 — 18,3482

3° 67,4265 — 0,25

4° 83 — 27,605

5° 19,4208 — 12

PROBLEMAS

1° Teniendo un individuo $ 38,67, pagó $ 15,41. Deseo saber cuánto le quedará.

2° Debiendo tener una torre 34m,675 se han construido ya 18m,36 de altura. Deseo saber cuánto le faltará construir.

3° Habiendo comprado una tropilla de caballos en 2708 $ y vendido en $ 4329,69, deseo conocer cuál ha sido la utilidad.

Multiplicación.

240. *Para multiplicar números decimales, se multiplican lo mismo que si fueran enteros, prescindiendo de la coma durante la multiplicación. Obtenido el producto, se separarán tantas cifras á la derecha, como cifras decimales contengan ambos factores.*

Ejemplo:

Multiplíquese 26,345 × 8,73

$$\begin{array}{r} 26{,}345 \\ 8{,}73 \\ \hline 79035 \\ 184415 \\ 210760 \\ \hline 229{,}99185 \end{array}$$

Teniendo el multiplicando *tres cifras* decimales y *dos* el multiplicador, tendremos que separar *cinco* cifras en el producto.

211. Cuando *alguno de los factores es entero ó fracción decimal*, se procede como en el caso anterior.

Ejemplo:

1° *Multipliquese* 365,28 × 81

$$\begin{array}{r} 365{,}28 \\ 81 \\ \hline 36528 \\ 292224 \\ \hline 29587{,}68 \end{array}$$

2° *Multipliquese* 26,742 × 0,35

$$\begin{array}{r} 26{,}742 \\ 0{,}35 \\ \hline 133710 \\ 80226 \\ \hline 9{,}35970 \end{array}$$

212. Si *en el producto no hubiesen tantas cifras como cifras decimales contiene el multiplicando y multiplicador*, se completa el número de cifras decimales, *añadiendo ceros á la izquierda.*

Ejemplo:

Multipliquese 0,381 × 0,038

$$\begin{array}{r} 0{,}381 \\ 0{,}038 \\ \hline 3048 \\ 1143 \\ \hline 0{,}014478 \end{array}$$

213. Sucede muy amenudo, que *hay que multiplicar dos números que tienen muchas cifras* decimales, no necesitándose en el producto sino una *aproximación* con un error más ó menos pequeño, en cuyo caso, puede aplicarse el método de **multiplicación abreviada**, que es el siguiente:

Para hallar el producto de dos números decimales, *con una aproximación menor que una unidad de un orden dado*, nos bastará:

1º Escribir el multiplicador *invertido*, debajo del multiplicando y teniendo la precaución de que *la cifra del multiplicador que expresa unidades*, venga á quedar debajo de la cifra del multiplicando que *expresa unidades* **100** *veces menores* á la unidad que indica *la aproximación pedida*.

2º Hecho esto, se multiplicará la primera cifra de la derecha del multiplicador, por la cifra del multiplicando *que está arriba de ella* y por todas las demás que quedan *á la izquierda*.

3º En seguida se multiplicará *la segunda cifra* del multiplicador por la *cifra del multiplicando que está encima* y todas las que tiene á su izquierda, y así, sucesivamente, teniéndose la precaución de hacer corresponder *en columna la primera cifra* de los productos parciales.

4º Se suman los productos parciales, *se tachan dos cifras* de la derecha, se le *agrega una unidad* y tendremos el producto aproximado pedido.

Ejemplos:

1º Multiplíquese con la *aproximación* de **0,0001.**

6,35871043 por 27,438263

MÉTODO GENERAL	METODO ABREVIADO
6,35871043	6.35871043
27,438263	36283472
1907613129	127174208
3815226258	44510970
1271742086	2543484
5086968344	190761
1907613129	50864
2543484172	1270
4451097301	378
1271742086	18
174,47196911918309	174,4719,53
	+ 1
	174,4720

2º Multiplíquese 38,674320108 por 9,365 con un error de **0,01**.

METODO GENERAL	METODO ABREVIADO
38,674320108	38,674320108
9,365	5639
193371600540	3480687
232045920648	116022
116022960324	23202
348068880972	1930
362,185007811420	362,18.41
	+ 1
	362,19

3º Multiplíquese 8,64535431 por 2,4281375 con un error de **0,001**

METODO GENERAL	METODO ABREVIADO
8,64535431	8,64535431
2,4281375	573,18242
4322677155	1729070
6051748017	345812
2593606293	17290
864535431	6912
6916283448	86
1729070862	24
3458141724	20.991,94
1729070862	+ 1
20,**992**109000897625	**20,992**

214. Al hacer la multiplicación por el método abreviado, *para separar las cifras decimales*, debe observarse *cuantas cifras decimales contiene el número que expresa la unidad cien veces menor* que la aproximación pedida y entonces, contando desde la derecha, separaremos ese mismo número de cifras.

Así.

En el 1er ejemplo *pedimos la aproximación de* 0,0001 y como el número *cien veces menor* 0,000001, tiene **6** cifras, separaremos *seis* cifras decimales.

En el 2o ejemplo, la aproximación pedida era 0,01, luego separaremos *cuatro* cifras y en el 3er ejemplo *cinco*.

EJERCICIOS.

$37,643 \times 27,75$

$145,32 \times 8,765$

$18,47 \times 147$

$0,0046 \times 1293$

$0,00007 \times 0,000045$

PROBLEMAS

1º Cuánto costarán 387 kg. de azúcar á $ 0.73 el kilógramo?

2º Se desea comprar 436 caballos á $ 38.75. Qué suma de dinero se necesitará?

3º Dividiendo un número por 3,82 dió por cociente 0,765. ¿Cuál será dicho número?

División.

215. En la *división de los números decimales* se presentan *tres casos*.

1º—*Cuando el dividendo y divisor son números decimales ó fracciones decimales.*

2º—*Cuando el dividendo es un número decimal ó fracción decimal y el divisor es entero.*

3º—*Cuando el dividendo es entero y el divisor es número decimal ó fracción decimal.*

216. PRIMER CASO:—*Cuando ambos términos son números ó fracciones decimales, se iguala con ceros el número de cifras decimales, se borra la coma y se divide como los enteros.*

Ejemplo 1º—Divídase 127,5 por 3,75.
Que se puede escribir

$$127{,}5 : 3{,}75 = 127{,}50 : 3{,}75 = 12750 : 375.$$

Luego

$$\begin{array}{r|l} 1275{,}0 & 375 \\ \cline{2-2} -\ 1125 & 34 \\ \cline{1-1} 1500 & \\ -\ 1500 & \\ \cline{1-1} 0000 & \end{array}$$

Ejemplo 2º—Divídase 0,091 por 0,0935.

Que se puede escribir

$$0{,}091 : 0{,}0035 = 0{,}0910 : 0{,}0035 = 910 : 35.$$

Luego

$$\begin{array}{r|l} 910 & 35 \\ \cline{2-2} -\ 70 & 26 \\ \cline{1-1} 210 & \\ -\ 210 & \\ \cline{1-1} 000 & \end{array}$$

Ejemplo 3º—Divídase 23,25 por 0,375.
Que se puede escribir

$$23{,}25 : 0{,}375 = 23{,}250 : 0{,}375 = 23250 : 375.$$

Luego

$$\begin{array}{r|l} 2325'0 & 376 \\ \cline{2-2} -\ 2250 & 62 \\ \cline{1-1} 00750 & \\ -\ 750 & \\ \cline{1-1} 000 & \end{array}$$

217. Segundo Caso:—*Para dividir un número ó fracción decimal por un entero, se hace la división como si fuesen enteros, separando despues en el cociente tantas cifras decimales como cifras decimales tiene el dividendo.*

Ejemplo—Divídase 171,45 por 27 y 0,2875 por 23.

171'45	27	0,2875	23
— 162	635	— 23	125
094		57	
— 81		— 46	
135		115	
— 135		— 115	
000		000	

Los cocientes son 635 y 125, pero *el primer* dividendo tiene *dos cifras* decimales, luego el cociente será

6,35

y como el segundo dividendo tiene *cuatro cifras* decimales, *el segundo* cociente en vez de 125 seria

0,0125

218. Tercer Caso:—*Para dividir un número entero por un número ó fracción decimal, se agregan al dividendo tantos ceros como cifras decimales hay en el divisor y en seguida se dividen como si fueran enteros.*

Ejemplo.—Divídase 624 por 9,75 y 15 por 0,625.

```
  6240,0 | 975          15000 | 625
— 5850     64         — 1250    24
   3900                  2500
—  3900                — 2500
   0000                  0000
```

219. *Cuando el dividendo no contiene al divisor*, es decir, cuando en el cociente no hay parte entera, *se pone como parte entera un cero y en seguida se agrega un cero al dividendo*, procediéndose después como en los casos anteriores.

Ejemplo.—Divídase 16,2 por 54 y tendremos

$$16{,}2 : 54 = 162 : 540$$

```
1620 | 540
1620   0,3
0000
```

220. Finalmente, *cuando la división no tiene cociente exacto*, después de haber agotado las cifras del dividendo, se *agrega un cero al último resíduo* y á los resíduos sucesivos que resultaren, y se sigue así indefinidamente *hasta llegar al límite de aproximación* que se quiera.

Este procedimiento, puede y debe adoptarse *cuando se dividan enteros que no tienen cociente exacto.*

Ejemplo 1º—Divídase 34,65 por 8,732.

```
  34650 | 8732
— 26196   3,96
   84540
 — 78588
    59520
  — 52392
     7128
```

Ejemplo 2º—Divídase 30,45 por 12.

```
  30,45 | 12
— 24      2,5375
    64
  — 60
     45
   — 36
      90
    — 84
       60
     — 60
       00
```

Ejemplo 3º—Divídase 25 por 8,35.

```
   2500 | 835
— 1670    2,99
   8300
 — 7515
    7850
  — 7515
     325
```

Ejemplo 4º—Divídase 0,34 por 9.

```
  34 | 9
- 27   0,0377
  70
- 63
   70
 - 63
    7
```

Ejemplo 5º—Divídase 12 por 48.

```
  120 | 48
-  96   0,25
  240
- 240
  000
```

221. Para hacer una **División Abreviada**, *con un error menor* que una unidad, nos bastará seguir el siguiente procedimiento.

1º *Tacharemos á la derecha del dividendo tantas cifras cuantas hay en el divisor, menos dos, y en seguida se hace la división como en el método general.*

2º *Una vez agotadas todas las cifras que quedaron en el dividendo, en vez de agregar nuevos guarismos ó ceros al residuo, tacharemos una cifra de la derecha del divisor y dividiremos el resíduo último por las cifras que quedaron en el divisor.*

3º *Determinado el nuevo resíduo, se volverá á tachar la última cifra del divisor y volveremos á dividir y así seguiremos hasta dividir el último resíduo, por la primera y única cifra del divisor que quedó.*

Ejemplo:—Dividamos 78563,495 por 4583.

MÉTODO GENERAL		MÉTODO ABREVIADO	
78563495	4583	78563495	4583
32733	17142	32733	17142,4
6524		6524	
19419		1941	
10875		109	
1709		19	
		3	

EJERCICIOS

29,372 : 25,68	51 : 16,87
39,45 : 8,439	0,49 : 8
17,692 : 14	0.675 : 4,325
93,12 : 25	15 : 32
36 : 4,38	127 : 585

PROBLEMAS

1º Multiplicando un número por 3,82 nos dió 2,0223. ¿Cuál es dicho número?

2º Compré 328 barricas de azúcar y tuve que pagar $ 11743,89. Deseo saber cuánto me habrá costado cada barrica.

3º ¿Cuántos caballos compré con $ 1836,25 sabiendo que he pagado por cada uno, la cantidad de $ 73,45?

Potencias y Raíces

222. *Para elevar á una* **potencia**, *un número ó fracción decimal, elevaremos á la potencia indicada dicho número y en seguida separaríamos las cifras decimales que correspondan.*

Ejemplo 1°

$$(2{,}5)^2 = 2{,}5 \times 2{,}5 = \mathbf{6{,}25}$$

Ejemplo 2°

$$(0{,}08)^3 = 0{,}08 \times 0{,}08 \times 0{,}08 = 0{,}\mathbf{000}512$$

223. *Para extraer la* **raiz cuadrada** *de un número ó fracción decimal, se procederá como con los enteros, teniendo la precaución de hacer par el número de cifras decimales y poner la coma en la raiz cuando se baje el primer período decimal.*

Ejemplo 1°

Hallar la $\sqrt{5{,}29}$

$$\begin{array}{r|l}
5{,}29 & \mathbf{2{,}3} \\ \hline
-\ 4 & 2 \times 2 = 43 \times 3 = 129 \\
12{,}9 & \\
-\ 129 & \\
000 &
\end{array}$$

Ejemplo 2°

Hallar la $\sqrt{0{,}0069738}$

SOLUCIÓN

$$\begin{array}{r|l}
0{,}00.69.73.8\mathbf{0} & \mathbf{0.0835}\ \textit{Raiz} \\ \hline
-\ 64 & 8 \times 2 = 163 \times 3 = 489 \\
57{,}3 & 83 \times 2 = 1665 \times 5 = 8325 \\
-\ 489 & \\
848{,}0 & \\
-\ 8325 & \\
155 &
\end{array}$$

luego $\sqrt{0{,}0069738} = \mathbf{0{,}0835} + \textit{residuo}\ 0{,}00.00.0155$

PRUEBA

$$0{,}0835 \times 0{,}0835 + 0{,}00.00.0155$$
$$= 0{,}00697225 + 0{,}00000155$$
$$= \mathbf{0{,}0069738}$$

224. Para hallar la raíz de un entero ó número decimal con la *aproximación* que se quiera, nos bastará *completar con ceros* á la derecha del entero, tantos períodos de dos cifras como cifras debe tener la aproximación pedida.

Así, si se pidiera la aproximación *á décimos*, deberá haber *un período* decimal; si se pidiera *á centésimos* deberá completarse *dos períodos*, etc.

Ejemplos 1º:

Hallar la raiz cuadrada de 59978, aproximada *á décimos.*

SOLUCIÓN

5.99.78,**00**	244,9 *Raíz*
19,9	$44 \times 4 = 176$
− 176	$484 \times 4 = 1936$
237,8	$4889 \times 9 = 44001$
− 1936	
4420,0	
− 44001	
199	

luego

$$\sqrt{59978} = \mathbf{244{,}9}$$

Ejemplo 2º:

Hallar la $\sqrt{285{,}734}$, aproximada *á centésimos.*

SOLUCIÓN

2.85.73.40	16'90 *Raiz*
— 1	26 × 6
18,5	329 × 9
— 156	3380
297,3	
— 2961	
124,0	

luego

$$\sqrt{285{,}734} = \mathbf{16{,}90}$$

Ejemplo 3º:

Hallar la $\sqrt{0{,}07843}$ con la aproximación de *cien-milésimos.*

SOLUCIÓN

0,07.84,30.00.00	0,28005 *Raiz*
— 4	48 × 8
38,4	560
— 384	5600
00030000,0	56005 × 5
280025	
19975	

225. Si en vez de tratarse de la *raíz cuadrada* se tratara de la *raíz cúbica*, se extraerá la raíz cúbica del número decimal dado, *como si fuera entero,* teniendo la precaución de que el número de cifras decimales sea *tres* ó un *múltiplo de tres*, lo que se conseguirá agregándole un número conveniente de *ceros*.

EJERCICIOS

$\sqrt{278.3541}$

$\sqrt{400.005}$

$\sqrt{38,4382}$

$\sqrt{26,54321}$

$\sqrt{1,000018}$

$\sqrt[3]{45832}$

$\sqrt[3]{489.765.324}$

$\sqrt[3]{4785,3425}$

$\sqrt[3]{0,84032}$

$\sqrt[3]{0,00000005}$

$\sqrt[3]{0,00000001}$

$\sqrt{0.008652}$

$\sqrt{\frac{3}{4}}$

$\sqrt{\frac{143}{765}}$

$\sqrt[3]{\frac{1769}{4324}}$

$\sqrt[3]{\frac{36758}{645}}$

$\sqrt[3]{\frac{1}{1.000.000}}$

CAPÍTULO VI.

Reducción de quebrados á Decimales.

226. Sucede á menudo en la práctica de las operaciones, que conviene **reducir un quebrado á fracción decimal**; operación que tiene por objeto, dado un quebrado convertirlo en una *fracción decimal equivalente* ó de un valor *tan aproximado como se quiera.*

Si el quebrado dado es *impropio*, se reduce á número mixto, es decir, *se reduce á entero y quebrado*, y éste quebrado es el que se reduce á fracción decimal.

227. *Para reducir un quebrado á fracción decimal, dividiremos el numerador por el denominador y seguiremos agregando tantos ceros al residuo, como lo requiera el grado de aproximación pedida.*

Ejemplo:

Redúzcase el quebrado $\frac{3}{7}$ á fracción decimal con la aproximación de *un milésimo.*

$$\begin{array}{r|l} 30 & 7 \\ \cline{2-2} 20 & 0{,}428 \\ 60 & \\ 4 & \end{array}$$

Luego

$$\frac{3}{7} = 0{,}428$$

228. *Cuando el cociente es exacto, es decir, cuando resulta un residuo cero*, la fracción decimal *será equivalente* al quebrado.

Esto sucederá *cuando el denominador del quebrado*, después de reducido este á su menor expresión, *no contenga más factores primos que 2 y 5:*

Ejemplo:

Redúzcase á fracción decimal el quebrado $\frac{5}{16}$

$$\begin{array}{r|l} 50 & 16 \\ \hline 20 & 0{,}3125 \\ 40 & \\ 80 & \\ 0 & \end{array}$$

$$\frac{5}{16} = 0{,}3125$$

229. Como vemos, solo en un número limitado de casos, la fracción decimal será *equivalente* al quebrado.

Cuando, como en este caso, la fracción decimal tiene un número limitado de cifras, la fracción decimal se llama *exacta* y cuando tiene un número de cifras ilimitado, se llama *inexacta.*

230. Las fracciones decimales *inexactas* pueden ser *periódicas y no periódicas.*

Las **periódicas**, son aquellas en la cual un cierto número de cifras llamado *período*, se repite indefinidamente, y **no periódicas** son aquellas fracciones decimales en las cuales no existe dicho período.

231. Las fracciones decimales *periódicas* se dividen en *simples y mixtas.*

Periódica simple, es aquella en que las cifras del *período* empiezan inmediatamente después del *cero*, como 0,54.54.54.

Ejemplo:—Redúzcase á fracción decimal el quebrado $\frac{5}{7}$.

$$\begin{array}{l|l} 50 & 7 \\ \hline 10 & 0,714285 \\ \quad 30 & \\ \quad\quad 20 & \\ \quad\quad\quad 60 & \\ \quad\quad\quad\quad 40 & \\ \quad\quad\quad\quad\quad \mathbf{50} & \end{array}$$

Como vemos, aquí se reproduce el dividendo **50**, luego el período será 714285 que se reproducirá *indefinidamente*, luego

$$\frac{5}{7} = 0,\mathbf{714285}\text{-}714285\ldots.$$

232. **Periódica mixta**, es aquella en que el período *no empieza inmediatamente* después del cero, como 0,67 592 592 en la que **67** *constituye la parte no periódica.*

Ejemplo:—Redúzcase á fracción decimal el quebrado $\frac{7}{12}$.

$$\begin{array}{l|l} 70 & 12 \\ \hline 100 & 0,58333 \\ \quad 40 & \\ \quad 40 & \\ \quad\quad 40 & \end{array}$$

Vemos que 0,58333 es una fracción *periódica mixta* en la que **58** es la parte *no periódica* y **3** el período.

EJERCICIOS.

Reducir á fracción decimal los quebrados

$$\frac{4}{5}, \quad \frac{3}{12}, \quad \frac{7}{32}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{8}{9}, \quad \frac{5}{6}, \quad \frac{6}{7}.$$

Reducción de Fracciones Decimales á Quebrados.

233. *Para reducir una fracción decimal á quebrado común, nos bastará suprimir el cero y la coma de la fracción y poner ese número como numerador de un quebrado, cuyo denominador será la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales hay, y finalmente, se simplifica el quebrado si se puede.*

Ejemplos:

$$0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$0{,}80 = \frac{80}{100} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

234. *En caso de que la fracción decimal no fuera exacta y fuera periódica simple, nos bastará escribir como numerador del quebrado el período, y como denominador un número compuesto de tantos nueves como cifras hay en el período.*

Después se simplifica el quebrado si se puede.

Ejemplos:

$$0{,}28.28 = \frac{28}{99}$$

$$0{,}126.126 = \frac{126}{999} = \frac{14}{111}$$

Debemos observar, que estos quebrados se podrán simplificar solo en el caso de que el numerador sea divisible por 3 ó por 9.

235. *Si la fracción decimal fuera periódica mixta se procederá de la siguiente manera:*

Se escribe la parte no periódica y á continuación el periodo.

Se le resta al número así formado, la parte no periódica y á esta diferencia se le pone por denominador un número compuesto de tantos nueves como cifras tiene el periodo y tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica.

Ejemplos:

$$0{,}385\,47\,47\,47 = \frac{38547 - 385}{99000} = \frac{38162}{99000}$$

$$0.8\,3\,3\,3 = \frac{83 - 8}{90} = \frac{75}{90} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$$

CAPÍTULO VII.

CÁLCULO CONCRETO.

PRELIMINARES.

236. Hasta ahora hemos operado con *números abstractos*, esplicando todas las operaciones de *composición y descomposición* que con ellos se pueden hacer.

Tócanos ahora estudiar los *números concretos*, es decir aquellos números que *determinan la especie* á que se refieren, pero para esto, nos será necesario conocer las **medidas**, que son los *instrumentos ó medios* usados para medir la *estensión, peso, valor* y *duración* de las cosas.

237. **Medir** es averiguar cuántas veces una *cantidad propuesta* contiene á otra *cantidad determinada de la misma especie*, adoptada como término de comparación y elegida como unidad de *medida*.

238. Las primeras especies de medidas reclamadas por los usos sociales son las siguientes:

1º—**Medidas lineales**, que sirven para determinar la estensión considerada como línea.

2º—**Medidas superficiales**, que sirven para medir la estensión considerada bajo dos dimensiones, es decir, las *superficies*.

3º—**Medidas cúbicas**, que sirven para medir la estensión considerada en tres dimensiones, es decir, los *volúmenes*.

4º—**Medidas de capacidad**, que *son también cúbicas*, pero que se usan para medir cuerpos que no afectan por sí solos una forma determinada como los *líquidos, cereales*, etc.

5º—**Medidas ponderales**, que son las que sirven para determinar el *peso* de los cuerpos.

6º—**Medidas monetarias**, que sirven para facilitar el cambio de las mercaderías, empleándose como término de comparación para *fijar el valor* de los objetos.

7º—**Medidas de tiempo**, que sirven para determinar la duración de las cosas y la fecha ó momento de un acontecimiento.

8º—**Medidas angulares**, que son aquellas que sirven para medir las *inclinaciones* de dos rectas ó las amplitudes de los arcos.

239. **Sistema de Medidas**, es, el conjunto de pesas y medidas adoptadas en un país.

240. Se llama **Sólido ó Cuerpo Geométrico**, todo lo que reune las tres dimensiones de *longitud, latitud* y *profundidad* ó bien, *largo, ancho* y *alto* ó *espesor*.

241. El espacio que ocupa un cuerpo, se llama **estensión**.

242. Se llama **superficie**, el límite exterior de los cuerpos, ó bien, es la extensión considerada en solo *dos* dimensiones, *longitud* y *latitud*.

243. La **línea**, es el límite de la superficie, ó sea, la extensión considerada en *una sola* dimensión, la *longitud*.

244. **Punto**, es el límite de la línea y se considera *sin dimensiones*.

Sistema Antiguo de Pesas y Medidas.

245. Antes de que se hubiera establecido el *Sistema Métrico Decimal*, en la República Argentina no había *un sistema* de pesas y medidas.

Cada Provincia, tenía el suyo propio, y todos ellos distintos entre sí.

Damos á continuación, el sistema de pesas y medidas *antiguo* de la Ciudad y Provincia de Buenos Aires y mas adelante, daremos una planilla de equivalencias entre las medidas *métricas* y las *antiguas* de cada Provincia.

CIUDAD Y PROVINCIA DE BUENOS AIRES

MEDIDAS LINEALES

Legua	Cuadra	Vara — UNIDAD	Pié	Pulgada	Línea	Equivalencia en metros
1	40	6.000	18.000	216.000	2.592.000	5196,0000
	1	150	450	5.400	64.800	129,9000
		1	3	36	432	0,866
			1	12	144	0,2886
				1	12	0,02405
					1	0,002004

MEDIDAS SUPERFICIALES

Legua cuadrada	Cuadra cuadrada	Vara cuadrada — UNIDAD	Pié cuadrado	Pulgada cuadrada	Línea cuadrada	Equivalencia en metros cuadrados
1	1.600	36.000.000	324.000.000	46.656.000.000	6.718.464.000.000	26.998.416,0000
	1	22.500	202.500	29.160.000	4.199.040.000	16.874,01
		1	9	1.296	186.624	0,749956
			1	144	20.736	0,08332844
				1	144	0,00057866
					1	0,000004018

MEDIDAS DE VOLÚMEN

Vara cúbica — UNIDAD	Pié cúbico	Pulgada cúbica	Línea cúbica	Equivalencia en metros cúbicos
1	27	46.656	80.621.586	**0,649461896**
	1	1,728	2.985.984	0,024054144
		1	1.728	0,000013920
			1	0,000000008

MEDIDAS PARA LÍQUIDOS

Pipa	Barril	Frasco — UNIDAD	Cuarta	Media cuarta	Octava	Equivalencia en litros
1	6	192	768	1.536	3.072	456,026304
	1	32	128	256	512	76,004384
		1	4	8	16	**2,375137**
			1	2	4	0,593784
				1	2	6,296892
					1	0,148446

NOTA—La pipa se divide también en 4 *cuarterolas.*

MEDIDAS PARA ÁRIDOS

Fanega — UNIDAD	Media fanega	Cuartilla	Media cuartilla	Equivalencia en decálitros
1	2	4	8	**13,7272**
	1	2	4	6,8636
		1	2	2.4318
			1	1,7159

MEDIDAS PONDERALES

Tonelada	Quintal	Arroba	Libra — UNIDAD	Onza	Adarme	Grano	Equivalencia en kilógramos
1	20	80	2.000	32.000	512.000	18.432.000	918,8000
	1	4	100	1.600	25.600	921.600	45,9400
		1	25	400	6.400	230.400	11,4850
			1	16	256	9.216	**0,4594**
				1	16	576	0,0287125
					1	36	0,0017945
						1	0,0001121

SISTEMA MÉTRICO DECIMAL

246. En 1790 la Asamblea de Francia, á moción de Talleyrand, dictaba el 8 de Mayo, un decreto, por el cual se ordenaba la uniformidad de pesas y medidas en toda la Francia.

Se habían hecho notables las dificultades que encontraba el comercio para el intercambio de las mercaderías, ya sea, por la diversidad de pesas y medidas ya sea, por la dificultad que se encontraba para reducir unas medidas á otras equivalentes.

Fué entonces, que el gobierno francés comisionó á Borda, Lagrange, Laplace, Monge y Condorcet, para que fijaran un *Sistema de pesas y medidas* que tuviera *por base* una *unidad natural é invariable* y que al mismo tiempo reuniera condiciones de *sencilléz* y *facilidad* en los cálculos.

La longitud que se adoptó por punto de partida, fué el *cuarto del meridiano terrestre*, que se dividió en *diez millones de partes*, dándose á cada una de estas partes el nombre de **metro**, palabra cuya etimología es *metrón*, que en griego quiere decir *medida*.

Para determinar la longitud del *cuarto de meridiano* terrestre se encargó á los sábios Méchain y Delambre, que midieron el *arco* del meridiano comprendido entre Dunkerque y Barcelona, operación empezada el 25 de Junio de 1792 y terminada siete años después.

Antes de calcular la longitud del *cuarto* de meridiano, el Instituto Real de Francia invitó á varias potencias europeas para que mandaran delegados, cosa que se hizo, y despúes de prolijos cálculos, el 22 de Junio de 1797 se presentaba al Cuerpo Legislativo de Francia los *prototipos del metro*, que equivalen á la *diez millonésima* parte del cuarto del meridiano terrestre.

Mediciones posteriores, han venido á probar que la comisión cometió un pequeño error, pues en realidad, según los últimos cálculos del astrónomo Bessel, el cuadrante del Meridiano Terrestre tiene 10,000856 metros.

247. Así nació el **Sistema Métrico**, llamado **Decimal** porque se convino que los múltiplos y submúltiplos de esas medidas crecieran ó decrecieran *según las potencias de diez*.

Se le suele llamar también *Sistema* **legal** *de pesas y medidas*, porque el Gobierno Argentino lo declaró obligatorio por decreto de fecha 10 de Setiembre de 1863.

248. Las *unidades* para las distintas clases de medidas son:

Medidas	*Lineales.*	El **metro**
»	*Superficiales*........	» **metro cuadrado**
»	de *Volúmen*........	» **metro cúbico**
»	» *Capacidad*......	» **litro**
»	» *Ponderales*......	» **gramo**
»	» *Monetarias*.....	» **peso moneda nacional**

249. Para expresar los *múltiplos* de las unidades principales *métricas*, se anteponen á la denominación de las unidades principales, las voces griegas

Deca que quiere decir **10** veces la unid. y se abrevia con la letra **D**
Hecto » » » **100** » » » » » » » » » **H**
Kilo » » » **1.000** » » » » » » » » » **K**
Miria » » **10.000** » » » » » » » » » **M**

Para expresar los *submúltiplos*, se anteponen al nombre de las unidades principales los vocablos latinos

Deci que q're decir *décima* p'te de la unidad y se abr. con la letra **d**
Centi » » » *centésima* » » » » » » » » » » **c**
Mili » » » *milésima* » » » » » » » » » » **m**

250. Así para indicar

10 gramos, diríamos.......	*Decágramo*
100 metros »	*Hectómetro*
1.000 litros »	*Kilolitro*
10,000 metros »	*Miriámetro*
Un *décimo* de gramo...........	*Decigramo*
Un *centésimo* de litro..........	*Centilitro*
Un *milésimo* de metro.........	*Milímetro*

Medidas lineales

251. Como ya hemos dicho, la *unidad de las medidas lineales* es el **metro**, cuya palabra se abrevia con la letra **m.**

Los *múltiplos* del *metro* son:

El **Decámetro**	que equivale á	**10**	mts. y se abrevia con la letra	**Dm**
El **Hectómetro**	» »	**100**	» » » » »	**Hm**
El **Kilómetro**	» »	**1.000**	» » » » »	**Km**
El **Miriámetro**	» »	**10.000**	» » » » »	**Mm**

Los *submúltiplos del metro* son:

El **Decímetro**	que equivale á	**0,1**	del m. y se abrevia c. la letra	**dm**
El **Centímetro**	» »	**0,01**	» » » » »	**cm**
El **Milímetro**	» »	**0,001**	» » » » »	**mm**

—El *Hectómetro, Kilómetro* y *Miriámetro* que sirven de unidad para medir grandes distancias, toman el nombre genérico de **Medidas Itinerarias.**

252. Para **escribir** una cantidad métrica lineal, se escribe primeramente la parte entera, se pone una coma y en seguida se escribe la fracción, del mismo modo que en la numeración decimal abstracta, teniendo cuidado de poner la denominación de la unidad sobre la coma.

Ejemplo:—Escribir *45 metros y seiscientos veinte y dos milímetros*. Se escribiría

$$45,^{m}622$$

Hay quien prefiere escribir por estenso la denominación de la unidad y en seguida el número decimal.

Ejemplo:—Escribir *trescientos ocho metros y siete centímetros.* Se escribiría

metros 308,07

253. Para leer una cantidad métrica lineal, se puede proceder de las maneras siguientes:

1°—*Enunciando la parte entera*, con la denominación correspondiente á la unidad principal adoptada, *y en seguida la fracción decimal.*

2°—*Enunciando*, como ántes *la parte entera* y en seguida *la parte decimal, con la denominación de la última cifra.*

3°—*Prescindir de la coma y leer todo el número* como si fuera entero, agregando al fin la denominacion correspondiente á la última cifra.

4°—*Enunciando cada cifra separadamente* con la denominación que le corresponde.

Ejemplo: Léase el número

$67342^{m},465$

1°—67342 *metros* y 465 *milésimos de metro.*

2°—67342 *metros* y 465 *milímetros.*

3°—67342465 *milímetros.*

4°—6 *miriámetros,* 7 *kilómetros,* 3 *hectómetros,* 4 *decámetros,* 2 *metros,* 4 *decímetros,* 6 *centímetros* y 5 *milímetros.*

254. Para **reducir unidades** *de un orden, á unidades de otro orden superior ó inferior, se procederá del mismo modo que cuando se tenía que multiplicar ó dividir un número decimal por 10, 100, 1000....etc.* (57,73), *es decir, se correrá la coma á derecha ó izquierda tantos lugares, como diferencia de orden existe entre la unidad dada y la unidad pedida.*

Cunando faltáran cifras, se reemplazarán con ceros.

255. Las **medidas efectivas**, ó sea los instrumentos materiales que se emplean para determinar las longitudes son:

El *doble decámetro*	=	**20** metros
» *Decámetro*	=	**10** »
» *medio decámetro*	=	**5** »
» *doble metro*	=	**2** »
El *metro*	=	**1** *unidad principal*
» *medio metro*	=	**0.50** de metro
» *doble decímetro*	=	**2** decímetros
» *decímetro*	=	**0.10** de metro

Ejemplo: Reducir

4568,^{m}36

á Decámetros	=	456Dm, 836 *milésimos* de **Dm.**
» Hectómetros	=	45Hm, 6838 *diezmilésimos* de **Hm.**
» Kilómetros	=	4 Km, 56836 *cien milésimos* de **Km.**
» Miriámetros	=	0Mm, 456836 *millonésimos* de **Mm.**
» Decímetros	=	45683^{dm}, 6 *décimos* de **dm.**
» Centímetros	=	456836 **cm.**
» Milímetros	=	4568360 **mm.**

Medidas Superficiales

256. La *unidad principal* de las medidas superficiales es el **metro cuadrado**, es decir un cuadrado cuyos lados tienen *un metro de* longitud.

Los *múltiplos del metro cuadrado, son:*

El **Decámetro cuadrado**	**Dm²**	que equivale á **100**	**mts.** cuadrad.
» **Hectómetro cuadrado**	**Hm²**	» » **10.000**	» »
» **Kilómetro cuadrado**	**Km²**	» **1.000.000**	» »
» **Miriámetro cuadrado**	**Mm²**	» **100.000.000**	» »

Los *submúltiplos* del *metro cuadrado*, son:

El **Decímetro cuadrado**	**dm²**	q' equivale á la **100ª**	parte del m. c.
» **Centímetro cuadrado**	**cm²**	» » **10.000ª**	» » »
» **Milímetro cuadrado**	**mm²**	» » **1.000.000ª**	» » »

257. Vemos que la *razón* que rige la formación de los múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado, *ya no es diez*, como en las medidas lineales, *sino cien.*

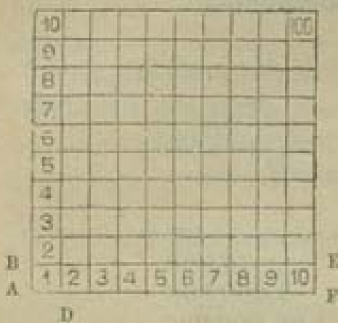
Luego, tenemos que:

1 Dm²	equivaldría	á 100 m²
1 Hm²	»	» 100 Dm² ó 10.000 m²
1 Km²	»	» 100 Hm² ó 1.000.000 m²
1 Mm²	»	» 100 Km² ó 100.000.000 m²
1 dm²	»	» 100 cm²
1 cm²	»	» 100 mm²

258. Debe tratarse de no confundir el *décimo de metro* cuadrado, con el *decímetro cuadrado*, puesto que el primero equivale á la *décima* y el segundo á la *centésima* parte del metro cuadrado.

Lo mismo diremos del *centésimo de metro* cuadrado y el *centímetro cuadrado* y del *milésimo* y *milímetro cuadrado.*

259. Para darnos cuenta de como las unidades superficiales ván creciendo de *cien* en *cien* imaginemos tener un cuadrado que tiene *un metro* de lado.



Dividamos todos los lados en *decímetros*, es decir en *diez* partes iguales, y trazando líneas por esos puntos de división, tendremos formadadas primeramente *diez* fajas como la A B E F y después *cien* pequeños cuadrados como el A B C D.

Cada una de esas fajas será la *décima parte del metro cuadrado* y cada cuadradito como el A B C D, será *un decímetro cuadrado.*

260. Para **escribir** un número que espresa *cantidades métricas superficiales,* se escribe la parte entera, se pone la coma y en seguida se escribe la fracción, *advirtiendo que cada orden de unidades debe ser representado con dos cifras*, por cuyo motivo, se suplirán con *ceros* las cifras significativas de que pudiera carecer el número que se tiene que escribir.

Ejemplos:

1° Escribir el número, *veinte y ocho metros cuadrados y treinta y seis decímetros cuadrados.*

$$28^{m^2}, 36$$

2° Escribir el número, *cinco metros, diez y ocho decímetros y cuatro centímetros cuadrados.*

$$5^{m^2}, 18.04$$

3º Escribir el número *diez y seis metros y cuarenta y siete milímetros cuadrados.*

16^{m^2}, **00.00**.47

4º—Escribir el número *nueve centímetros* cuadrados:

0^{m^2}, 00.09

261. Para **leer** un número que representa *medidas métricas superficiales,* se puede leer lo mismo que las medidas lineales, pero teniendo cuidado de *agregar un cero cuando sea impar* el número de cifras que representa la fracción, á fin de que *cada unidad* se halle representada por un *período de dos cifras.*

El número 435^{m^2}, 73042 se podrá leer de las siguientes maneras:

1º—435 *metros cuadrados* 73042 *cienmilésimos* de metro cuadrado.

2º—435 *metros cuadrados* y 730.420 *milímetros cuadrados.*

3º—435.730.420 *milímetros* cuadrados.

4º—4 *decámetros,* 35 *metros,* 73 *decímetros,* 4 *centímetros* y 20 *milímetros cuadrados.*

262. *Para* **reducir** *unidades de un órden á unidades de otro órden superior ó inferior, se correrá la coma á la derecha ó la izquierda, tantas veces dos lugares, como diferencias de órden existe entre la unidad dada y la pedida, y cuando falten cifras, se reemplazarán con ceros.*

Ejemplo:—Reducir el número

$32563^{m^2}, 8235$

á $Dm^2 = 325^{Dm^2}, 638235$
» $Hm^2 = 3^{Hm^2}, 25638235$
» $Km^2 = 0^{Km^2}, 0325638235$
» $Mm^2 = 0^{Mm}\ 000325638235$
» $dm^2 = 3256382^{dm^2}, 35$
» $cm^2 = 325638235^{cm^2}$
» $mm^2 = 32563823500^{mm^2}$

263. No existen **medidas efectivas** para las superficies, sirviendo para determinarlas, las *medidas lineales* y los cálculos posteriores.

264. Cuando se trata de expresar medidas superficiales de gran extensión se adoptan las **medidas agrarias**, cuya unidad es el **área** que equivale á la superficie de un cuadrado cuyo lado es *diez metros*, es decir, equivale á *cien metros cuadrados*.

Tiene un solo *múltiplo*, que es la **hectárea**, equivalente á *cien áreas* ó sea 10,000 *metros cuadrados* y un sólo *submúltiplo*, la **centiárea**, que equivale á la centésima parte de un área, es decir, *un metro cuadrado*.

Las abreviaciones usadas son: **á** para el *área*, **Há** para la *hectárea* y **ctá**. para la *centiárea*.

265. Para *escribir*, *leer* y *reducir* las medidas agrarias, se procede como con las medidas superficiales, es decir, por períodos de *dos en dos cifras*.

Ejemplos: *Escribir* el número 25 hectáreas, 23 áreas, 59 centiáreas:

$15^{Há}\ 23^{á}\ 59^{ctá}$

2º—*Leer* el número $39^{Há}$, $17^{á}$, $95^{ctá}$. Sería 39 *hectáreas*, 17 *áreas* y 95 *centiáreas*, ó bien 391.795 *centiáreas* ó también 3917 *áreas* y 95 *centiáreas*.

3º—*Reducir* el número $8576325^{ctá}$.

á *áreas* = $85763^{á}$ $25^{ctá}$.

á *hectáreas* = $857^{Há}$ $63^{á}$ $25^{ctá}$.

4º—*Reducir* el número $38^{Há}$ $17^{á}$ $58^{ctá}$.

á áreas = $3817^{á}$ $58^{ctá}$.

á centiáreas = $381758^{ctá}$.

266. Cuando se trata de expresar las *superficies de los estados*, continentes, etc., las unidades usadas son el *kilómetro* y *Miriámetro cuadrado*.

PROBLEMAS

1º—Cuál es la superficie de un rectángulo de $8^{m},35$ de largo por $5^{m}47$ de ancho?

2º—Cuántos metros cuadrados tendrá un triángulo, cuya base tiene $23^{Dm},785$ y cuya altura es $14^{m}62$?

3—Cuántos metros cuadrados tendrá un trapecio, cuya base mayor tiene $65^{Hm}.789$; la base menor $3^{Km}.786754$ y cuya altura es de $0^{m},00017$?

4º—Debiendo embaldozar un patio que tiene $9^{m},5$ de largo por 83^{Dm} de ancho, deseo saber cuantas baldosas necesitaré, sabiendo que cada baldoza tiene *un decímetro cuadrado* de superficie?

Medidas de volúmen.

267. La *unidad principal* de las medidas de volúmen es el **metro cúbico**, es decir, un *cubo* cuyas aristas tengan un metro de longitud.

Los *múltiplos* del metro cúbico, se espresan por medio de los números ordinarios.

Así, se dice 10 *metros cúbicos*, 45 *metros cúbicos*, etc.

Los *submúltiplos* del metro cúbico, son:

El **Decimetro cúbico**-dm^3-q'equivale á la 1.000ª pte. de 1 m^3
» **Centímetro cúbico**-cm^3- » » 1.000.000 » »
» **Milímetro cúbico**-mm^3 » » 1.000.000.000 »

268. Vemos, pues, que la formación de las unidades de volúmen, se hacen ya no de *diez en diez* como en las medidas lineales, ó de *cien en cien* como en las superficiales, sino de *mil en mil*.

Luego tendremos:

$$1m^3 = 1000dm^3 = 1.000.000cm^3 = 1.000.000.000mm^3$$
$$1dm^3 = 1000cm^3 = 1.000.000mm^3$$
$$1cm^3 = 1000mm^3$$

269. Es necesario no confundir, *décimo, centésimo*, ó *milésimo de metro cúbico, con decimetro, centímetro* ó *milímetro cúbico*.

270. Para darnos perfecta cuenta de esto, supongamos que tenemos un cubo de 1^m de arista y que dividimos cada arista en diez partes iguales, es decir, en *decímetros* y trazando líneas por los puntos de división opuestos, tendremos como antes (259) formadas primeramente *diez fajas de un metro* de largo por *un decímetro* de ancho; en seguida tendremos formados *cien* cuadrados de *un decímetro*

de lado y finalmente imaginando planos por esas líneas y puntos de división, tendremos formadas *diez* zonas de *cubos* pequeños, con *cien* cubos cada una, lo que nos dará un total de *mil cubos* de un decímetro de lado, es decir, que *el metro cúbico contendrá mil decímetros cúbicos.*

271. Para **escribir** un número que esprese *medidas cúbicas*, se escribe la parte entera, se coloca la coma, y en seguida se escribe la fracción decimal, despues de haber escrito sobre la parte entera, la abreviación correspondiente y teniendo presente, que cada uno de los submúltiplos deberá estar representado por *tres cifras*, por cuyo motivo se reemplazarán con *ceros* las cifras que falten.

Ejemplos:—Escríbase el número, *veinte y cinco metros, setecientos ochenta y seis mil cuatrocientos treinta y cinco centímetros cúbicos.*

$$25^{m^3},786.435$$

Escríbase el número, *diez y ocho metros y treinta y cinco decímetros cúbicos.*

$$18^{m^3},035$$

Escríbase, *cuatro metros y siete milímetros cúbicos.*

$$4^{m^3},000.000.007$$

272. Para **leer** un número que represente *medidas métricas cúbicas*, se lee como los que representan medidas lineales y superficiales, teniendo cuidado de que *las cifras* que expresan la fracción sean *tres ó múltiplo de tres*, para poderlos dividir en periodos de *tres cifras.*

En caso de que faltasen cifras se completarán por medio de *ceros* colocados á la derecha.

Ejemplo:—Para leer el número $25^{m^3},4803658$, se podrá enunciar:

1º—25 *metros cúbicos* 4803658 *millonésimos de metro cúbico.*

2º—25 *metro cúbicos* 480.365.**800** *milímetros cúbicos.*

3º—25.480.365.**800** *milímetros cúbicos.*

4º—25 *metros*, 480 *decímetros*, 365 *centímetros*, y **800** *milímetros cúbicos.*

273. Para **reducir** unidades de medidas *métricas cúbicas* á unidades de órden superior ó inferior, se traslada la coma, *tantas veces tres* lugares á la derecha ó á la izquierda, como órden de distinta denominación métrica se encuentran pasando de la especie dada á la especie pedida. Si faltaran cifras, se reemplazan con ceros á la derecha.

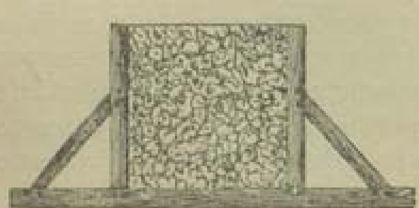
Ejemplo:—Reducir el número

$$43^{m^3},866743$$

$$\begin{aligned} \text{á dm}^3 &= 43866^{dm^3},743 \\ \text{» cm}^3 &= 43866743^{cm^3} \\ \text{» mm}^3 &= 43866743\mathbf{000}^{mm^3} \end{aligned}$$

274. Tampoco para estas medidas, existen **medidas efectivas**, pues para hallar los volúmenes, nos valemos de las *medidas efectivas lineales*.

274. Cuando se trata de *medir leña*, se usa como unidad principal el *Esterio* que es la cantidad de leña que puede apilarse en un *metro cúbico.*



275. El *esterio* se abrevia con **est.** y tiene *un solo múltiplo*, *el* **decasterio**, y *un solo submúltiplo el* **decisterio.**

275. El *decasterio* equivale á *diez esterios* y se abrevia con **Dest.** y el *decisterio*, equivalente á la *décima* parte de un *esterio* y se abrevia con **des.**

276. Para **escribir, leer** y **reducir** las medidas para las leñas, se procede como con las *medidas lineales*, es decir, por cifras sucesivas, y esto es porque los *múltiplos y submúltiplos van de* **10** *en* **10**.

Ejemplos:

1º—Escribir el número 28 *decasterios*, 7 *esterios* y 3 *decisterios*.

$$28^{Dest}\ 7^{est}\ 3^{dest}$$

2º—Escribir, 107 *decasterios* y 4 *decisterios*.

$$107^{Dest},04^{dest}$$

3º—Léase el número

$38^{est},6$ se podría leer de cuatro modos:

I. —38 *Esterios* y 6 *décimos de Esterio*.
II. —38 *Esterios* y 6 *decisterios*.
III.—386 *decisterios*.
IV.—3 *Decasterios*, 8 *esterios* y 6 *decisterios*.

4º Reducir 39^{est}.

á Dest. $= 3^{Dest},9$
» dest. $= 390^{dest}$

Problemas

1º—Cuál es el volúmen de un prisma de base rectangular, que tiene $6^{m},35$ de largo; $3^{m},89$ de ancho y $9^{m},72$ de alto?

2º—Cuál es el volúmen de un cono recto que tiene $0^{m},07$ de radio de la base y $0^{m},59$ de alto.

3ª—Cuántos decímetros cúbicos tendrá una esfera de $0^m,53$ de radio?

4ª—Debiendo construir una pared de ladrillo de $6^m,75$ de largo por $4^m,87$ de alto, deseo saber cuantos ladrillos necesitaré sabiendo que la pared es de dos ladrillos y cada ladrillo con la mezcla necesaria tiene $0^m,35$ de largo, $0^m,17$ de ancho y $0^m,06$ de espesor?

Medidas de Capacidad

277. La *unidad principal* de las medidas de capacidad es el **litro**, equivalente al volúmen de un *decímetro cúbico.*

Es decir, pues, que un *metro cúbico* contiene *mil litros.*

278. Los *múltiplos* del litro son:

El **Decálitro**	—que equivale á	10	litros	y se abrevia con	Dl.
» **Hectólitro**	— » »	» 100	»	» »	» Hl.
» **Kilólitro**	— » »	» 1000	»	» »	» Kl.

Los *submúltiplos* son:

El **Decilitro**	—q' equivale á la	10ª	parte del litro	y se abrevia c.	dl
» **Centilitro**	— » »	100ª	» » »	» »	» cl
» **Mililitro**	— » »	1000ª	» » »	» »	» ml

279. Para **escribir, leer y reducir** unidades métricas *de capacidad*, se procederá lo mismo que para las medidas lineales.

Ejemplos:

1º—Escribir 385 *hectólitros* y 5 *litros.*

$$385^{Hl}\ 0^{Dl}\ 5^{l}$$

2º—Léase el número

$$6315^{l},785$$

I. —6345 *litros* **785** ***milésimos de litro.***
II. —6345 *litros* 785 ***mililitros.***
III.—**6345785** ***mililitros.***
IV.—63 *hectólitros* 4 *decálitros* 5 *litros* 7 *decílitros* 8 *centílitros* y 5 *mililitros.*

3º—Redúzcanse $768^{l},549$.

á Hl $= 7^{Hl}68549$
» Dl $= 76^{Dl}8549$
» dl $= 7685^{dl}49$
» cl $= 76854^{cl}9$
» ml $= 768549^{ml}$

280. *Las medidas de capacidad* se usan para medir los *líquidos y los granos.*

281. Las **medidas efectivas** que se usan en el comercio, son:

El	**Doble Hectólitro**	=	200	litros
»	**Hectólitro**	=	100	»
»	**Medio Hectólitro**	=	50	»
»	**Doble decálitro**	=	20	»
»	**Decálitro**	=	10	»
»	**Medio decálitro**	=	5	»
»	**Doble litro**	=	2	»
»	**Litro**	=	1	» *Unidad*
»	**Medio litro**	=	5	decílitros
»	**Doble decílitro**	=	2	»
»	**Decílitro**	=	1	»
»	**Medio decílitro**	=	5	centílitros
»	**Doble centílitro**	=	2	»
»	**Centílitro**	=	1	»

282. En el comercio se usa *para los granos* el *hectólitro, decálitro y litro.*

Problemas

1°—Cuántos litros de agua se necesitarán para llenar un algibe cilíndrico que tiene $3^m,65$ de altura y siendo la base circular del radio, igual á $1^m,57$?

2°—Cuántas botellas de $0^l,65$ de capacidad necesitaré para embotellar el vino contenido en una vasija cónica de $1^m,15$ de altura y cuya base circular tiene $0^m,68$ de radio?

3°—Cuántos hectólitros de trigo habrá en un montón de este cereal, que tiene la forma de una pirámide de $7^m,54$ de altura y cuya base es un cuadrado de $25^m,78$ de lado?

Medidas Ponderales.

283. La *unidad principal* de las *medidas ponderales* es el **gramo**, que equivale al peso de *un centímetro cúbico* de agua destilada y á 4 *grados* de temperatura.

Suele adoptarse como unidad *convencional* el **kilógramo** que vulgarmente se llama *kilo*, que equivale al peso de un *decímetro cúbico ó un litro* de agua destilada á 4 grados de temperatura.

284. Se usó el *agua destilada*, porque todas las aguas de la naturaleza contienen sustancias en disolución y entónces, un *decímetro cúbico* de agua de pozo, no tienen el *mismo peso* que un *decímetro cúbico* de agua de algibe, ni el peso del mismo volúmen de agua de mar, etc., mientras que el *agua destilada*, se puede obtener en cualquier parte del globo y teniendo el *mismo peso en igualdad de volúmen*.

285. Se usa el agua á 4° temperatura porque á esa temperatura tiene su *máximum* de densidad, pues cuando baja de ese límite, el agua se pone más liviana como lo evidencia el hecho de *flotar el hielo* en una vasija que contiene agua.

286. Los *múltiplos* del gramo son:

El **Decágramo**	Dg	que equivale	á	10	*gramos*
» **Hectógramo**	Hg	»	»	100	»
» **Kilógramo**	Kg	»	»	1000	»
» **Miriágramo**	Mg	»	»	10.000	»
» **Quintal Métrico**	Qm	»	»	100.000	»
» **Tonelada Métrica**	Tm	»	»	1.000.000	»

Los *submúltiplos* del gramo son:

El **Decigramo**	— dg	que equivale	á la	10ª	parte	del	*gramo*
» **Centigramo**	— cg	»	»	100ª	»	»	»
» **Miligramo**	— mg	»	»	1000ª	»	»	»

287. **Para escribir, leer y reducir** cantidades que espresan *medidas ponderales*, se procede lo mismo que para las medidas lineales, puesto que las *medidas ponderales* tienen también por *base* el **10**, para formar sus múltiplos y submúltiplos.

Ejemplos:

1°—Escribir 43 *kilógramos*, 6 *hectógramos*, 7 *gramos* y 3 *centígramos*.

$$43^{kg}\ 6^{Hg}\ 0^{Dg}\ 7^{g},\ 0^{dg}\ 3^{cg}$$

2º – Léase el número

$78369^{g},48$

I. — 78369 *gramos*, 48 *centésimos de gramo.*
II. — 78369 *gramos*, 48 *centigramos.*
III. — 7836948 *centigramos.*
IV. — 7 *Miriágramos*, 8 *kilógramos*, 3 *hectógramos*, 6 *decágramos*, 9 *gramos*, 4 *decigramos* y 8 *centigramos.*

En la práctica se leería:

78 *kilógramos*, 369 *gramos*, y 48 *centigramos.*

3º—Redúzcase $78369^{g},48$

á *Decágramos*	=	$7836^{Dg},948$
» *Hectógramos*	=	$783^{Hg},6948$
» *Kilógramos*	=	$78^{Kg},36948$
» *Miriágramos*	=	$7^{Mg},836948$
» *Quintal métrico*	=	$0^{Qm},7836948$
» *Tonelada métrica*	=	$0^{Tm},07836948$
» *Decigramos*	=	$783694^{dg},8$
» *Centigramos*	=	7836948^{cg}
» *Miligramos*	=	78369480^{mg}

288. Las **medidas ponderales efectivas**, que se usan en el comercio son:

El **Medio quintal Métrico**	=	50	*kilógramos.*
» **Doble Miriágramo**	=	20	»
» **Miriágramo**	=	10	»
» **Medio Miriágramo**	=	5	»
» **Doble kilógramo**	=	2	»
» **Kilógramo**	=	1000	*gramos.*
» **Medio Kilógramo**	=	500	»
» **Doble Hectógramo**	=	200	»
» **Hectógramo**	=	100	»

» **Medio Hectógramo**	=	50 »
» **Doble Decágramo**	=	20 »
» **Decágramo**	=	10 »
» **Medio Decágramo**	=	5 »
» **Doble Gramo**	=	2 »
» **Gramo**	=	*Unidad.*
» **Medio Gramo**	=	5 *decigramos.*
» **Doble Decigramo**	=	2 »
» **Decigramo**	=	1 »
» **Medio Decigramo**	=	5 *centigramos.*
» **Doble Centígramo**	=	2 »
» **Centigramo**	=	1 »
» **Medio Centigramo**	=	5 *miligramos.*
» **Doble Miligramo**	=	2 »
» **Miligramo**	=	1 »

Problemas

1° Cuánto pesará el agua contenida en una vasija cilíndrica cuya altura es de $1^m,34$ y rádio $0^m,36$, suponiendo que el agua sea destilada y á 4 grados de temperatura?

2° Sabiendo que un decímetro cúbico de cobre pesa 8800 gramos, deseo saber cuántos kilógramos pesará un prisma de cobre que tiene $0^m,34$ de alto: $0^m,49$ de ancho y $0^m,74$ de largo?

3° Habiendo comprado un pan de oro que tiene $0^m,018$ de largo; $0^m,011$ de ancho y $0^m,003$ de espesor, en la suma de $ 30,000, deseo saber cuánto habrá pagado por cada gramo de oro, sabiendo que un decímetro cúbito de oro pesa $19^{kg}26$?

Densidad.

289. Hay otro medio para *determinar el peso de un cuerpo*, siempre que se conozca la **densidad ó peso específico** de la sustancia que constituye el cuerpo que se trata de pesar.

290. La *densidad ó peso específico* de un sólido ó líquido es la *relación ó cociente* que existe entre el peso de un volúmen de un cuerpo y el peso del *mismo volúmen* de agua destilada.

Así, si *dos decímetros* cúbicos de oro pesan $38^{kg}52$, y *dos decímetros* cúbicos de agua destilada pesa 2^{kg}, resultará que la densidad del oro será:

$$D = 38^{kg}\,52 : 2^{kg} = 19{,}26$$

291. Damos á continuación, un *cuadro* con las densidades de varios cuerpos comunes:

Platino........	21.50	Zinc..........	7.20
Oro	19.26	Cristal........	3.33
Mercurio......	13.60	Vidrio........	2.70
Plomo........	11.35	Granito.......	2.70
Plata.........	10.51	Arena........	1.40
Bronce	8.90	Cal apagada..	1.38
Cobre	8.80	Tierra vegetal.	1.25
Nickel........	8.28	*Agua.........*	*1.00*
Latón.........	8.00	Hielo.........	0.92
Fierro........	7.79	Cal viva......	0.82
Estaño........	7.30		

292. Para *determinar el peso* de un cuerpo *conociendo su volúmen y su densidad,* basta multiplicar el volúmen por su densidad.

Ejemplo:—*¿Cuál será el peso de una barra de plata que tiene* $3^{dm^3},75$ *de volúmen?*

La densidad que tenemos en la tabla, es 10,51; luego el peso de la barra de plata sería:

SOLUCIÓN.

$$P = 3{,}75 \times 10{,}51 = 37^{kg}\ 4125$$

293. Para determinar el *volúmen* de un cuerpo, *conociendo su peso y densidad*, basta dividir el peso por la densidad.

Ejemplo:—*¿Cuál será el volúmen de un montón de arena que pesa* $65^{kg},800$?

SOLUCIÓN.

$$V = 65^{kg},\ 800 : 1{,}4 = 47^{dm^3}$$

294. Puede también *determinarse la densidad*, conociendo *su peso y su volúmen*, para lo cual nos bastará *dividir el peso por el volúmen.*

Ejemplo: — *¿Cuál será la densidad del cobre sabiendo que una barra de 7 decímetros cúbicos de ese metal pesa* $61^{kg}6$?

SOLUCIÓN.

$$D = \frac{61^{\ kg}6}{7} = 8.80$$

PROBLEMAS.

1°—¿Cuánto pesará una esfera de cobre de 1^{m} de rádio?

2°—¿Cuál será el volúmen de una pirámide de Granito que pesa $3476^{kg}.342$?

3°—¿Qué altura tendrá un cilindro circular de $1^{m},78$ de rádio, formado de Estaño y cuyo peso es $84379^{kg},65$?

Medidas Monetarias.

295. Monedas, son las medidas que se emplean como término de comparación para fijar el valor de los objetos, y sirven para facilitar el cambio de las mercaderías.

Las monedas usadas en la antigüedad eran los mismos artículos que se cambiaban, así, una bolsa de trigo valía, *dos, tres, cuatro*, etc. *cueros de oveja*, pero notándose que era sumamente costoso el transporte de los objetos para efectuar el cambio, se convino en señalar á ciertos y determinados pequeños objetos, un *valor relativo ó representativo* y así se formaron las monedas constituidas por *conchillas, discos de cuero, chapas de metal*, hasta llegar en nuestros tiempos á ser formadas por discos de *metal acuñado*, que además de tener un *valor relativo ó nominal*, tienen un *valor real ó intrínseco*, casi igual al nominal.

296. Esas monedas están constituidas hoy por discos de *oro, plata* y *cobre*, sobre los cuales se ha gravado el valor *asignado* á la moneda, la *fecha* de la *acuñación*, etc.

En la fabricación de las monedas, debe tenerse muy presente el *peso, título* y *cuño*, ordenados por la ley.

El *cuño* es el grabado que la ley ordena.

El *peso* está también marcado por la misma ley, y el *título* es la cantidad de oro ó plata *pura* que la moneda debe contener.

297. No siendo el oro y la plata metales bastantes duros para resistir al uso continuado, se ha convenido en *ligarlos* con el *cobre*.

Luego al decir de una moneda, que tiene un *tí-*

tulo de **0,900** *milésimos*, quiere decir que el metal que se usó para acuñar la moneda, contenía **9** partes de oro y **1** de cobre, es decir que, un kilógramo de ese metal contenía 900 gramos de oro y 100 de cobre.

298. Al acuñarse la moneda no siempre se tiene para todas ellas el *mismo peso* ni tampoco el *mismo título* por los errores inherentes á todo trabajo humano, por cuyo motivo la misma ley que ordena la acuñación de la moneda, marca también cuál será la *tolerancia de peso y la tolerancia de título* permitida.

299. La *unidad principal* de las *medidas monetarias*, es el **peso moneda nacional**.

Los *submúltiplos* del *peso moneda nacional* son:

El *décimo*	que equivale á la	10ª	parte de un peso	
» *Centésimo ó centavo*	» » » »	100ª	» » » »	
» *Milésimo*	» » » »	1000ª	» » » »	

300. El modo de **leer, escribir y reducir** las *medidas monetarias*, es el mismo empleado en las medidas lineales, por cuyo motivo creemos inútil insistir sobre ello.

301 Las **medidas** *monetarias* **efectivas**, es decir, las que están en uso han sido fijadas por una ley de fecha *5 de Noviembre de 1881.*

Damos á continuación tres tablas, por las cuales se tiene el *nombre*, clase de *metal*, *valor*, *peso*, *título*, *diámetro* y *tolerancia* de las monedas.

MONEDAS DE ORO

NOMBRE	CLASE DE METAL	VALOR DE LA MONEDA	TÍTULO		PESO		DIÁMETRO
			Justo	Tolerancia en más ó en menos	Justo	Tolerancia en más ó en menos	
			Milés.	Milés.	Gramos	Milés.	Milímetros
Argentino	ORO	5 pesos	900 de oro y 100 de cobre	1	8.0645	2	22
½ *Argentino*		2 ½ »		1	8.0322	2	19

MONEDAS DE PLATA

CLASE DE METAL	VALOR DE LA MONEDA	TÍTULO		PESO		DIÁMETRO
		Justo	Tolerancia en más ó en menos	Justo	Tolerancia en más ó en menos	
		Milésimos	Milésimos	Gramos	Milésimos	Milímetros
PLATA	*Un peso*	900 de plata y 100 de cobre	2	25.000	3	37
	50 centavos		3	12.500	5	30
	20 »		5	5.000	5	23
	10 »		5	2.500	7	18
	5 »		5	1.250	10	16

MONEDAS DE COBRE

CLASE DE METAL	VALOR DE LA MONEDA	TITULO		PESO		DIÁMETRO
		Justo	Tolerancia en más ó en menos	Justo	Tolerancia en más ó en menos	
			Milésimos	Gramos	Milésimos	Milésimos
COBRE	2 *centavos*	95 partes de cobre, 4 de estaño y 1 de zinc	10 en el cobre y 5 en el estaño y zinc	10,000	10	30
	1 »			5,500	10	25

302. Además de estas monedas metálicas se usa también el *papel moneda*, y las *letras de cambio*, que tienen la ventaja de ser de más *fácil trasporte*, pero tienen el inconveniente de no ser *universales* y *no tener un valor fijo*, pues varían según circunstancias que analizaremos al tratar del Cálculo Mercantil.

Reducción de Medidas antiguas á Medidas Métricas

303. Para **reducir medidas antiguas á medidas métricas**, debemos tener presente la tabla que damos á continuación que nos dá *unidades principales* de medida de todas las Provincias, así como su *equivalencia* en medidas métricas.

304. La regla para obtener esa reducción es la siguiente:

PLANILLA DE EQUIVALENCIAS

Medidas	Unidades	Equivalencia en	Bs. Aires	Sta. Fé	Entre Ríos	Corrientes	San Luis	Mendoza	San Juan
Lineales	*Vara*	*Metros*	0,8666	0,866	0,8685	0,8662	{0,8361 {0,8673	0,8361	0,8361
Superficiales	*Vara cuadrada*	*Metros cuadrados*	0,750996	0,749956	0,754292	0,750302	{0,699063 {0,752209	0,699063	0,699063
Para líquidos	*Frasco*	*Litros*	2,375137	2,375	2,255	2,664	0,282	2,235	Arrobas 35,748
» *áridos*	*Fanega*	*Decalitros*	13,7272	21,99576	13,764	25,7908	20,11536	11,1702	13,7384
Ponderales	*Libra*	*Kilógramos*	0,4594	0,460358	0,459748	0,465163	0,47206	0,459967	0,460155

Medidas	Unidades	Equivalencia en	Córdoba	Santiago	Tucumán	Salta	Catamarca	Rioja	Jujuí
Lineales	*Vara*	*Metros*	{0,8483 {0,8676	0,8673	{0,866 {0,863	0,8611	0,8361	0,8422	0,83059
Superficiales	*Vara cuadrada*	*Metros cuadrados*	{0,719622 {0,752729	0,752209	{0,749956 {0,733609	0,741496	0,699063	0,7093	0,698728
Para líquidos	*Frasco*	*Litros*	2,593	2,40	2,3751	2,50	2,694	2,50	2,222
» *áridos*	*Fanega*	*Decalitros*	21,698	34,71936	Almud 3,13528	27,7196	21,2779	29,80408	55,501
Ponderales	*Libra*	*Kilógramos*	0,4659	0,459936	0,4594	0,459620	0,4608	0,459770	0,45921

NOTA.—En las Provincias de San Luis y Tucumán hay dos unidades de medidas lineales y superficiales. En las equivalencias que establecemos, la superior corresponde á las *Municipales* y la inferior á las *Agrarias*.

Para reducir un número cualquiera de unidades antiguas á unidades métricas, se multiplica el número dado, préviamente reducido á incomplejo de la unidad principal, por su equivalencia en medida métrica.

Ejemplos:

1° *Redúzcase* 2 @ 7 ℔ 8 onz. de **Buenos Aires** *á kilógramos.*

SOLUCIÓN

$$2 \text{ @ } 7 \text{ ℔ } 8 \text{ onz.} = 57^{\text{℔}},5 \times 0,4594$$

luego

$$2 \text{ @ } 7 \text{ ℔ } 8 \text{ onz.} = \mathbf{26^{k}\cdot4155}$$

2° *Redúzcase* 458 v^2, $2p^2$, $4pl^2$ de **Santa Fé** *á metros cuadrados.*

SOLUCIÓN

$$458 \text{ v.}^2 \text{ 2 p.}^2 \text{ 4 pl.}^2 = 458 \text{ v}^2, 2098 \times 0,^{\text{mm}2}\,\mathbf{749956}$$
$$= \mathbf{343^{m2},637}$$

3° *Redúzcase* 304 v, 1 p. 14 pl. de **Entre Ríos** *á metros*

SOLUCIÓN

$$304 \text{ v. } 1 \text{ p. } 14 \text{ pl.} = 304^{v}\cdot722 \times 0^{m\cdot},8685$$
$$= \mathbf{264^{m\cdot},551}$$

4° *Redúzcase* 247 frs. de **Corrientes** *á litros.*

SOLUCIÓN

$$247^{\text{frs}} \times 2^{l},604 = \mathbf{643^{l},188}$$

5º *Redúzcase* **147** fns. de **San Luis** *á decálitros.*

SOLUCIÓN.

$$147 \text{ fns.} \times \mathbf{20}^{\text{Dl}}, \mathbf{11536} = \mathbf{2956}^{\text{Dl}}, \mathbf{95792}$$

6º *Redúzcase* $7^{\text{v.}}\frac{35}{56}$ de **Mendoza** *á metros.*

SOLUCIÓN.

$$7^{\text{v.}}\frac{35}{56} = 7^{\text{v.}}\frac{5}{8} = 7^{\text{v.}},625 \times \mathbf{0{,}8361}$$

$$= \mathbf{6}^{\text{m.}},\mathbf{375}$$

7º *Redúzcase* 4 onz. de **San Juan** *á kilógramos.*

SOLUCIÓN.

$$4 \text{ onz.} = 0^{\text{lb}},25 \times \mathbf{0{,}460155} = \text{kg}\mathbf{0{,}115038}$$

Reducción de Medidas Métricas á Medidas Antiguas.

305. **Para reducir medidas métricas á medidas antiguas** bastará ***dividir el número dado por su equivalente*** en medida antigua, equivalente que tenemos espresado en la *planilla de equivalencias* (**303**), y si quedaran resíduos, se valuarán en unidades de orden inferior.

Ejemplos:

1° *Redúzcanse* 285 kg. á libras *de* **Córdoba**.

SOLUCIÓN.

285 : 0,**4659** = 611 ℔ 11 onz 8 ad.

= **6** qq. **0** @ **11** ℔ **11** onz. 8 ad.

2° *Redúzcanse* 745 metros á varas de **Santiago del Estero.**

SOLUCIÓN.

745 m. : 0,**8673** = **862** v. **1** p. **4** pl.

3° *Redúzcanse* 7432 l. á frascos *de* **Tucumán.**

SOLUCIÓN

7432 : **2,3751** = **3129** frs. $\frac{1}{2}$ ct.

4° *Redúzcanse* $437^{m.^2}$ á varas *de* Salta.

SOLUCIÓN

$437^{m.^2}$ × 0,**741493** = **589** v² **23** p.² **3** pl.²

5° *Redúzcanse* 1085 $^{Dl.}$ á fanegas *de* **Catamarca.**

SOLUCIÓN.

1085 : **21,2779** = **50** fn. **11** $\frac{6}{7}$ *almud.*

6º *Redúzcanse* $0^{m},376$ á vara *de* La Rioja.

SOLUCIÓN

0,376 : **0,8422 = 0** v. **1** p. **4** pl.

7º *Redúzcanse* $48^{kg},659$ á libras *de* **Jujuy.**

SOLUCIÓN

48,659 : **0,45931 = 105** ℔ **15** onz.

CAPÍTULO VIII.

CÁLCULO DE NUMEROS CONCRETOS.

---

306. Se llaman *números concretos*, aquellos que determinan la *especie* de la unidad.

Números incomplejos, aquellos números *concretos*, que están compuestos formados por *una sola* unidad concreta, por ejemplo, 3 *varas;* 8 *libras;* 25 *cuadras*, etc.

Complejos, son los números *concretos* que están formados por unidades de *distinta* especie pero de la *misma naturaleza*, por ejemplo: 2 *varas* 3 *piés* 8 *pulgadas;* 2 *arrobas* 14 *libras* y 10 *onzas*, etc.

307. De modo pues, que todos los números que expresan medidas del antiguo sistema, *serán números* complejos, lo mismo que los números que espresan medidas de *tiempo* y *medidas angulares* que son las siguientes:

MEDIDAS DE TIEMPO

(Comercial)

Siglo	Lustros	Años	Meses	Días	Horas	Minutos	Segundos
1	20	100	1.200	36.000	864.000	51.840.000	3.110.400.000
	1	5	60	1.800	43.200	2.592.000	155.520.000
		1	12	360	8.640	518.400	31.104.000
			1	30	720	43.200	2.592.000
				1	24	1.440	86.400
					1	60	3.600
						1	60
							1

308. La planilla anterior *no es exacta*, pues la duración del año es de *365 días y una fracción* espresada por 0,242256, es decir que la *duración del año solar*, es de días 365,242256, ó proximamente 365 $\frac{1}{4}$.

El *año civil*, es de 365 días y para tener en cuenta la fracción 0,242256 de día, se ha convenido que *cada cuatro años*, tenga 366 días. Este año de 366 días se llama *bisiesto*.

Pero, como se comete un nuevo error, al agregar *un día* á cada *cuatro años* trascurridos, error que equivale á 3 días cada 400 años, se ha convenido también en que *no sean bisiestos*, los años que teniendo un número exacto de centenas, *no sea divisible por cuatro* el número que espresa dichas centenas.

Así, el año 1400 no fué bisiesto
» » 1500 » » »
» » 1600 *fué* bisiesto
» » 1700 no fué bisiesto
» » 1800 » » »
» » 1900 no será bisiesto
» » 2000 *será* bisiesto.

309. El día que se aumenta al año bisiesto, se agrega al mes de Febrero.

El número de días que tiene cada uno de los meses es el siguiente:

Enero....	31 días	Julio......	31 días
Febrero..	28 ó 29 días	Agosto	31 »
Marzo....	31 días	Setiembre .	30 »
Abril.....	30 »	Octubre...	31 »
Mayo	31 »	Noviembre	30 »
Junio	30 »	Diciembre.	31 »

310. Las medidas de la *circunferencia* son las siguientes:

MEDIDA DE LA CIRCUNFERENCIA Y ANGULARES

Circunferencia	Cuadrantes	Grados	Minutos	Segundos
1	4	360	21600	1.296.000
	1	90	5400	324.000
		1	60	3.600
			1	60

La *amplitud del arco*, es independiente del rádio.

311. Se ha pretendido introducir el sistema *decimal* para las medidas angulares, dividiendo:

La circunferencia	en	4	*cuadrantes*
1 cuadrante	en	100	*grados*
1 grado	en	100	*minutos*
1 minuto	en	100	*segundos,*

pero creemos que pasarán siglos antes que esta innovación se lleve á cabo por completo, no tan solo por la reforma de las divisiones de los ricos instrumentos usados en la Astronomía, sinó porque habría que rehacer por completo las tablas de logaritmos y otras, que son un monumento de ciencia y paciencia humana.

312. Antes de entrar al *cálculo de los números complejos* daremos una planilla que nos dá las abreviaciónes empleadas para representar las distintas unidades.

Abreviaciones.

MEDIDAS

Lineales		Capacidad.		Ponderales		De tiempo		Angulares	
Legua	Lg.	Pipa.	Pp.	Tonelada	Ton	Siglo	Sig.	Grado	°
Cuadra	Cd.	Cuarterola	Ct.	Quintal	qq.	Lustro	Lus.	Minuto	'
Vara	V.	Barril	Brl	Arroba	@.	Año	Año	Segundo	''
Pié	p.	Frasco	fr.	Libra	℔.	Mes	ms.		
Pulgada	pl.	Cuarta	ct.	Onza	onz.	Día	d.		
Linea	ln.	Octava	oct	Adarme	ad.	Hora	hr.		
				Grano	gr.	Minuto	m.		
						Segundo	s.		

Reducciones.

313. Para **reducir un número complejo á otro incomplejo** de menor especie, se procederá del siguiente modo:

1° *Se multiplica el número que expresa las unidades superiores, por el equivalente de una de estas unidades espresadas en unidades del órden inmediato inferior.*

2° *Se agregan á este producto el número que exprese, en el complejo, unidades de la misma especie.*

3° *Esta suma, se multiplica por el equivalente de una de sus unidades del órden inmediato inferior y á este producto se agregan las unidades de la misma especie que existan en el complejo dado, y así sucesivamente.*

Ejemplo:

Redúzcase á la menor especie expresada, *el número complejo:*

7 Cd. 28 V^s. 2 p. 3 pl.

Solución

	7	Cd.
×	150	*varas que tiene una cuadra.*
	1050	varas
+	28	*varas que tiene el complejo dado.*
	1078	varas
×	3	*piés que tiene una vara.*
	3234	piés
+	2	*piés que tiene el número dado.*
	3236	piés
×	12	*pulgadas que tiene un pié.*
	6472	
	3236	
	38832	pulgadas
+	3	*pulgadas que tiene el número dado.*
pls	**38835**	= 7 Cd. 28 V^s. 2 p. 3 pl.

314. Para **reducir un incomplejo á complejo**, nos bastará:

1º *Dividir el número propuesto por el número de unidades necesarias para formar otra unidad del órden superior inmediato.*

2º *El cociente que resulta, se vuelve á dividir por el número de unidades del órden siguiente y así sucesivamente.*

3º *El último cociente, representará las unidades de órden superior del* **complejo** *pedido, y los sucesivos residuos serán las otras unidades del complejo buscado.*

Ejemplo:

Redúzcase el *incomplejo* 38835 pl^s. á *número complejo*:

SOLUCIÓN

38835	12 pl^s. *que tiene un pié.*		
28	3236 pl^s.	3 *piés que tiene una vara.*	
43	23	1078 v.	150 *vs. q' tiene una cud.*
75	26	**28** v.	**7** *cd.*
3 pl^s.	**2** p^s.		

luego

38835 pl. = **7** cd. **28** v. **2** ps. **3** pl.

315. Para **reducir un complejo á quebrado común**, se procederá de la siguiente manera:

1º *Se reduce primeramente el complejo á incomplejo de la menor especie expresada.*

2º *Se reduce también á la menor especie la unidad superior con que se quiere expresar el quebrado.*

3º *El resultado de la primera operación será el* **numerador** *del quebrado y el resultado de la segunda será el* **denominador.**

4º *Se simplifica el quebrado si se puede.*

Ejemplo 1º

Reducir á quebrado *de quintal* el complejo

2 @ 12 ℔ 8 onz.

1ª Operación

$$2^{@} \times 25^{℔} = 50^{℔} + 12^{℔} = 62^{℔} \times 16^{onz.} = 992^{onz} + 8^{onz.}$$

$$= \mathbf{1000}\ \textit{onzas}$$

2ª Operación

$$1^{qq.} = 4^{@} \times 25^{℔} = 100^{℔} \times 16^{onz.} = \mathbf{1600}\ \text{onz.}$$

3ª Operación

$$2\ @\ 12\ ℔\ 8\ \text{onz.} = \frac{\mathbf{1000}}{\mathbf{1600}}\ \textit{de quintal}$$

4ª Operación

$$\mathbf{2\ @\ 12}\ ℔\ \mathbf{8}\ \text{onz.} = \frac{10}{16} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{8}}\ \textit{de quintal}$$

Ejemplo 2º:

Reducir á *quebrado de día* el complejo

4 días **3** h. **8** m.

1ª Operación

$$4^{d} \times 24^{h} = 96^{h} + \mathbf{3}^{h} = 99^{h} \times 60^{m} = 5940^{m} + \mathbf{8}^{m}$$

$$= \mathbf{5948}\ \text{minutos}$$

2ª OPERACIÓN

$$1^d \times 24^h = 24^h \times 60^m = \mathbf{1440}\ \textit{minutos}$$

3ª OPERACIÓN

$$4^d\ 3^h\ 8^m = \frac{\mathbf{5948}}{\mathbf{1440}}$$

4ª OPERACIÓN

$$4^d\ 3^h\ 8^m = \frac{1487}{360} = \mathbf{4}\frac{\mathbf{47}}{\mathbf{360}}\ \textit{de día}$$

316. Para hacer la operación inversa, es decir, para **reducir un quebrado á complejo** se procederá de la siguiente manera:

1º *Si el quebrado es* impropio *se divide el numerador por el denominador sacándose así la parte entera, que espresará unidades del órden á que se refiere el quebrado común.*

2º *El residuo que queda se multiplica por el número de unidades del órden inmediato inferior contenidas en la unidad principal.*

3º *Se divide este producto por el mismo denominador del quebrado propuesto.*

4º *Si hubiera un segundo residuo, se multiplicará por las unidades de la subdivisión siguiente.*

5º *Se vuelve á dividir este producto por el denominador del quebrado dado y así sucesivamente.*

317. *Si el quebrado es* propio *se multiplica previamente el numerador del quebrado, por las unidades de la primera subdivisión necesaria para formar una uni-*

dad principal y este producto se divide por el denominador procediéndose en seguida como en el caso anterior.

Los cocientes, serán los números que formarán el complejo.

1er Ejemplo:

Reducir á número complejo, el quebrado $\frac{1487}{360}$ *de día.*

1a Operación

$$\begin{array}{r|l} 1487 & 360 \\ \hline -47 & 4 \textit{ días} \end{array}$$

2a Operación

$$47 \times 24^h = 1128^h$$

3a Operación

$$\begin{array}{r|l} 1128 & 360 \\ \hline -48 & 3 \textit{ horas} \end{array}$$

4a Operación

$$48 \times 60^m = 2880^m$$

5a Operación

$$\begin{array}{r|l} 2880 & 360 \\ \hline 0000 & 8 \textit{ minutos} \end{array}$$

luego resultará que

$$\frac{1487}{360} = 4 \text{ días } 3 \text{ h. } 8 \text{ m.}$$

La operación se puede disponer de la siguiente manera:

```
 1487 | 360
        -----
   47   4 días
 × 24ʰ
 -----
  188
  94
 ----
 1128 | 360
        -----
   48   3 horas
 × 60ᵐ
 ----
 2880 | 360
        -----
 0000   8 minutos
```

2° Ejemplo:

Reducir *á número complejo*, el quebrado $\frac{5}{8}$ *de quintal*

Solución

```
         5
       × 4@
       -----
        20@ | 8
              ---
         4    2 arrobas
       ×25
       -----
       100lb | 8
               ---
        20    12 libras
         4
       ×16
       -----
onzas  64   | 8
              ---
        00    8 onzas
```

luego

$$\frac{5}{8} \text{ de qq.} = 2 \text{ @ } 12 \text{ lb } 8 \text{ onz.}$$

318. *Para reducir un* **número complejo á número ó fracción Decimal,** *se procede como para reducirlos á quebrados comunes y en seguida se saca el número ó fracción decimal, dividiendo el numerador por el denominador.*

Ejemplo 1º

Reducir á fracción decimal de *grados*, el número complejo:

36° 43' 18"

SOLUCIÓN

36°	1 *grado*
×60'	×60
2160 *minutos*	60 *minutos*
+43	×60"
2203 *minutos*	**3600** *segundos*
×60"	
132180	
+18	
132198 *segundos*	

Luego

$$36^{\circ}\ 43'\ 18'' = \frac{\mathbf{132.198}}{\mathbf{3600}}$$

y efectuando la división

$$\mathbf{36^{\circ}\ 43'\ 18'' = 36^{\circ},\ 7216}$$

2º Ejemplo:

Reducir á fracción decimal de *varas* el complejo

2 p. **7** pl. **11** ln.

SOLUCIÓN

$$
\begin{array}{r l}
 & 2\ \text{p} \\
\times & 12 \\ \hline
 & 24 \\
+ & 7 \\ \hline
 & 31\ \textit{pulgadas} \\
\times & 12 \\ \hline
 & 62 \\
 & 31 \\ \hline
 & 372 \\
+ & 11 \\ \hline
 & 383\ \textit{líneas}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r l}
 & 1\ \textit{vara} \\
\times & 3 \\ \hline
 & 3\ \textit{piés} \\
\times & 12 \\ \hline
 & 36\ \textit{pulgadas} \\
\times & 12 \\ \hline
 & 72 \\
 & 36 \\ \hline
 & 432\ \textit{líneas}
\end{array}
$$

luego

$$2\ \text{p. } 7\ \text{pl. } 11\ \text{ln.} = \frac{383}{432}\ \textit{varas}$$

y efectuando la división

$$\mathbf{2}\ \text{p. } \mathbf{7}\ \text{pl. } \mathbf{11}\ \text{ln.} = \mathbf{0^{v},8865}$$

319. Finalmente, para **reducir un número ó fracción decimal á números complejos**, operación que se suele llamar **valuación** *de fracciones decimales*, se procede de la manera siguiente:

Se multiplica **solamente la fracción decimal** *por el número de unidades en que se subdivide la unidad principal á que la fracción se refiere, separando en el producto tantas cifras á la derecha como cifras decimales tiene la fracción decimal propuesta.*

La parte entera del producto espresarán unidades de la primera subdivisión de la unidad principal.

Las cifras decimales que quedan se vuelven á multi-

plicar por las unidades de la segunda subdivisión necesarias para formar una unidad de la primera y la parte entera de este producto, espresará unidades de la segunda subdivisión.

Así se procedería hasta llegar á un producto entero ó hasta la última denominación del número complejo.

Ejemplo 1º:

Redúzcase á número complejo:

@ 25,75

SOLUCIÓN

```
Arrobas 25, 75
          × 25 libras
          -----
           375
          150
        -------
Libras  18,75
          × 16 onzas
          -----
           450
           75
        -------
Onzas   12,00
```

luego tenemos

@ 25,75 = 25 @ 18 ℔ **12** onzas

Ejemplo 2º

Redúzcase á número complejo

v, 0,75

SOLUCIÓN

$$\begin{array}{rrl} & v.\ 0{,}75 & \\ & \times\ 3 & \text{piés} \\ \hline \textit{Piés} & 2{,}25 & \\ & \times\ 12 & \text{pulgadas} \\ \hline & 50 & \\ & 25 & \\ \hline \textit{Pulgadas} & 3{,}00 & \end{array}$$

luego sale

$$v.\ 0{,}75 = 2\ p.\ 3\ pl.$$

OPERACIONES FUNDAMENTALES CON LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Adición.

320. Es necesario tener presente que para sumar y restar números complejos, es necesario que sean *homogéneos*, es decir, *concretos de la misma naturaleza.*

Prescindiremos de las operaciones con los números *incomplejos* por que se hacen como con los números *abstractos.*

321. Para *sumar números complejos* se pueden *reducir todos los sumandos á la menor espresión indicada* y despues se suman como si fueran números abstractos, reduciéndose en seguida el *incomplejo* obtenido á *complejo.*

322. El método generalmente adoptado es el siguiente:

1º *Se colocan los sumandos unos debajo de los otros de manera que se correspondan en columna vertical, las unidades de la misma especie.*

2º *En seguida se suman sucesiva y separadamente, empezando por las unidades inferiores todas las columnas, escribiendo debajo de ellas las sumas parciales obtenidas.*

3º *Si alguna de las sumas parciales contuviese unidades del orden inmediato superior, se deducirán de ellas para agregarlas al orden que corresponde y solo se escribe el resto que quede, debajo de la columna que se acaba de sumar.*

EJEMPLO

Súmase—

8 v. 2 p. 14 pl. + 7 v. 1 p. 6 pl. + 19 v. 2 p. 9 pl.

SOLUCIÓN

8	v.	2	p.	14	pl.
7	»	1	»	6	»
19	»	2	»	9	»
S = 34	v.	5	p.	29	pl.

y haciendo la 3ª operación

S = 34 v. 7 p. 5 pl.

ó bién

S = **36** v. **1** p. 5 pl.

323. Generalmente, al sumar las unidades de la 1ª columna, se coloca el resto debajo de la columna *y se llevan inmediatamente las unidades de órden superior para sumarlas con la columna siguiente.*

Ejemplo

Súmese 6 @. 7 lb. 8 onz. + 2 @. 23 lb. 10 onz. + **3** @. 0 lb. 5 onz. + 1 @. 6 lb.

Solución

+1	@	+2	lb		
6	»	7	»	8	onz.
2	»	23	»	10	»
3	»	0	»	15	»
1	»	6	»	0	»
13	@.	13	lb	1	»

que sería igual

S = **3** qq. **1** @. **13** lb. **1** onz.

Sustracción.

324. **Para restar números complejos.**

1º *Se coloca el sustraendo debajo del minuendo de manera que se correspondan las unidades del mismo órden.*

2º *En seguida se restan sucesiva y separadamente cada columna.*

3º *En caso de que las unidades de un orden cualquiera del minuendo fueran menos que las del sustraendo se convertirá una unidad del órden inmediato superior en unidades del orden que se está restando, considerando entonces disminuida de una unidad, á la unidad del órden superior.*

EJEMPLO

Réstese 3 @. 21 ℔. 7 onz. de 5 @. 10 ℔. 9 onz.

SOLUCIÓN

5	@.	10	℔.	9	onz.
— 3	@.	21	℔.	7	onz.

como vemos 21 ℔. no se puede restar de 10 ℔., luego la operación se preparará de la siguiente manera:

4	@.	35	℔.	9	onz.
— 3	@.	21	℔.	7	onz.
1	@.	14	℔.	2	onz.

Multiplicación

325. En la **multiplicación de números complejos** se presentan tres casos:

1º *Multiplicar un incomplejo por un complejo.*

2º *Multiplicar un complejo por un incomplejo.*

3º *Multiplicar un complejo por otro complejo.*

326. PRIMER CASO.—**Para multiplicar un incomplejo por un complejo** *se pueden usar dos métodos.*

Primer Método.—Este método consiste en *reducir el complejo á quebrado* (315), multiplicar este quebrado por el incomplejo y el incomplejo que resulta, reducirlo *á complejo* (316), si se quiere.

EJEMPLO

Por una pipa de vino me han dado 16 @. 8 ℔. 7 onz. de *azúcar.*

Deseo saber cuántas arrobas de azúcar me darán por 28 *pipas de vino.*

SOLUCIÓN POR QUEBRADOS COMUNES

$$x = 16\ @.\ 8\ ℔.\ 7\ \text{onz.} \times 28 = 16\,\frac{135}{400} \times 28$$

$$= 16\,\frac{27}{80} \times 28 = \frac{1307}{80} \times 28$$

$$= \frac{36596}{80} = \frac{9147}{20} = 457\,\frac{9}{20}\ \textit{arrobas}$$

y reduciendo el quebrado á complejo, resulta (316)

$$x = \mathbf{457}\ @\ \mathbf{11}\ ℔\ \mathbf{4}\ \text{onz.}$$

Segundo Método. —Este método consiste en *reducir el complejo á número decimal* (318), multiplicar el incomplejo por este número decimal y el incomplejo que resulta se reduce á complejo (319) si se quiere.

EJEMPLO

Para comprobación podemos tomar el problema anterior.

SOLUCION POR DECIMALES

$$x = 16\ @\ 8\ \text{lb.}\ 7\ \text{onz.} \times 28 = \overset{@}{16{,}3375} \times 28 = \mathbf{457{,}45}$$

y reduciendo el decimal á complejo

$$\begin{array}{r}
457{,}45 \\
\times\ 25 \\
\hline
225 \\
90 \\
\hline
\text{lb}\ 11{,}25 \\
\times\ 16 \\
\hline
150 \\
25 \\
\hline
\text{onz.}\ 4{,}00
\end{array}$$

$$x = \mathbf{457}\ @\ \mathbf{11}\ \text{lb}\ \mathbf{4}\ \text{onz.}$$

resultado *igual* al anterior.

327. TERCER CASO.—Para *multiplicar un complejo por otro*, puede emplearse tambien los *dos* métodos indicados anteriormente.

Primer Método.—Este método consiste en reducir *los dos* complejos á incomplejos *en forma de quebrado* (315) multiplicar los dos quebrados y el quebrado que resulta convertido en complejo, (316) si se quiere.

Ejemplo:

Suponiendo que un buque á vapor recorre 135 *leguas*, 28 *cuadras y* 60 *varas por día, deseo saber cuanto recorrerá en* 18 *días*, 9 *horas y* 7 *minutos.*

SOLUCIÓN POR QUEBRADOS COMUNES

135 lg. 28 cd. 60 v. × 18 d. 9 h. 7 m.

$$= 135\ \frac{4260}{6000} \times 18\ \frac{547}{1440}$$

$$= 135\ \frac{213}{300} \times 18\frac{547}{1440} = 135\ \frac{71}{100} \times 18\ \frac{547}{1440}$$

$$= \frac{13571}{100} \times \frac{26467}{1440} = \frac{13.571 \times 26.467}{100 \times 1440}$$

$$= \frac{359.183.657}{144.000} = 2494\ \frac{47657}{144000}\ \textit{leguas}$$

y reduciendo el quebrado á complejo, resulta

$x =$ **2494** lg. **13** cd. **35** v. **2** p. **1** pl. **2,4** ln.

Segundo Método.—Consiste este método en *reducir los dos* números complejos á decimales (**318**) multiplicar estos dos decimales y el número incomplejo que resulta reducirlo á complejo (**319**) si se quiere.

Ejemplo:

Tómese el ejemplo anterior lo cual nos servirá de comprobación.

SOLUCIÓN POR DECIMALES

$$x = 135 \text{ lg. } 28 \text{ cd. } 60 \text{ v. } \times 18 \text{ d. } 9 \text{ h. } 7 \text{ m.}$$

$$= 135{,}71 \times 18{,}3798611$$

$$
\begin{array}{lr}
= & \mathbf{2494},33095 \\
 & \times\ 40 \\
\hline
\text{cd.} & \mathbf{13},23800 \\
 & \times 150 \\
\hline
 & 1190000 \\
 & 23800 \\
\hline
\text{v.} & \mathbf{35},70000 \\
 & \times\ 3 \\
\hline
\text{p.} & \mathbf{2},100 \\
 & \times 12 \\
\hline
\text{pl} & \mathbf{1},2 \\
 & \times 12 \\
\hline
\text{ln.} & \mathbf{2{,}4}
\end{array}
$$

de donde sacamos

$$x = \mathbf{2494} \text{ lg. } \mathbf{13} \text{ cd. } \mathbf{35} \text{ v. } \mathbf{2} \text{ p. } \mathbf{1} \text{ pl. } \mathbf{2{,}4} \text{ ln.}$$

resultado igual al anterior con un error menor que 4 *pulgadas*.

División.

328. La división de los números complejos presenta los *cuatro casos* siguientes:

1º *Dividir un complejo por un incomplejo.*

2º *Dividir un incomplejo por un complejo.*

3º *Dividir complejos de la misma especie.*

4º *Dividir complejos de especie diferente.*

329. La división de los números complejos *se puede efectuar* también *de tres distintos modos.*

1º Por el *método de las reducciones.*

2º Por el *método de los quebrados comunes.*

3º Por el *método de los decimales.*

330. PRIMER CASO.—Para **dividir un número complejo por un incomplejo**, se puede proceder por los tres métodos indicados anteriormente.

Primer Método.—Empleando el *método de las reducciones* procederemos de la siguiente manera:

1º *Se divide la unidad superior del complejo por el incomplejo.*

2º *El residuo que queda se reduce á unidades de orden inferior.*

3º *Se le agregan las unidades de este mismo orden que hay en el dividendo y este será el segundo dividendo parcial.*

4º *Se divide este nuevo dividendo por el divisor y el residuo que queda se vuelve á reducir á unidades de orden inferior agregándole las unidades del mismo orden que hay en el dividendo y así sucesivamente.*

5º *Si las unidades principales del dividendo no contuvieran el divisor, se reducen á unidades de la especie inmediata inferior y después se procede como queda indicado, advirtiéndose que las cifras del cociente de-*

berán ser de la misma especie que la de los dividendos parciales.

Ejemplo:

Repartiendo 874 @ 20 lb de arroz entre 324 familias, ¿cuánto corresponderá á cada familia?

SOLUCIÓN POR REDUCCIÓN

1er. dividendo **874** @	20 lb	324
» *residuo* 226 × 25 =	+ 5650 »	**2** @ **17** lb **8** onz.
2do. dividendo.............	**5670** »	
	2430	
» *residuo*...............	162	
	× 16	
3er. dividendo.............	**2592**	
	0000	

Segundo Método.—Empleando el *método* de los *quebrados comunes,* reduciríamos el complejo á quebrado, dividiríamos el quebrado por el complejo y el cociente que resulta, se reducirá á complejo si se quiere.

Ejemplo:

Para comprobación supongamos el mismo ejemplo.

SOLUCIÓN POR QUEBRADOS COMUNES

$$874 \text{ @ } 20 \text{ lb} : 324 = 874\,\frac{20}{25} : 324 = 874\,\frac{4}{5} : 324$$

$$= \frac{4374}{5} : 324 = \frac{4374}{1620} = 2\,\frac{1134}{1620} = 2\,\frac{567}{810}$$

$$= 2\,\frac{63}{90} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{10}}$$

y reduciendo el quebrado $2\frac{7}{10}$ de @ á complejo resultará

874 @ 20 ℔ : 324 = **2** @ **17** ℔ **8** onz.

resultado igual al anterior.

Tercer Método.—Para emplear el tercer método, *reduciremos el complejo á decimal,* se dividirá el decimal por el complejo y el cociente que resulte se reducirá á complejo.

Ejemplo:

El mismo anterior.

Solución por decimales

874 @ 20 ℔ : 324 = 874,80 : 324 = 2,70

y reduciéndolo á complejo

874 @ 20 ℔ : 324 = **2** @ **17** ℔ **8** onz.

331. Segundo Caso.— Cuando se tiene que dividir **un incomplejo por un complejo**, se puede proceder por los tres métodos indicados anteriormente.

Primer Método.—Para aplicar el *método de las reducciones* se procederá de la manera siguiente:

1º *Se reduce el complejo* (divisor) *á incomplejo.*

2º *Se multiplica el dividendo por todos los factores que se han usado para reducir el divisor complejo á incomplejo.*

3º *Se dividen los dos incomplejos así obtenidos, valuando los residuos en sucesivas subdivisiones de la unidad principal que se busca.*

Ejemplo:

Suponiendo que un hombre ha recorrido 2077 leguas en 24 ds. 19 h. 12 m. se desea conocer cuál ha sido la marcha media, por día.

SOLUCIÓN POR REDUCCIONES

	DIVIDENDO	DIVISOR
	2077	**24** ds. **19** h. **12** m.
	× 24	× 24 h.
	8308	96
	4154	48
		576
		+ 19
	49848	595 h.
	× 60	× 60 m.
		35700
		+ 12
1er *Dividendo*	2990880	35712 *Divisor*
	133920	**83** lg. **30** cd.
Resíduo	26784	cd.
	× 40	
2º *Dividendo*	1071360	
	0000000	

Segundo Método.—Este método consiste en *reducir el complejo á quebrado*, efectuar la división de los dos complejos y el cociente que resulta reducirlo á complejo.

Ejemplo:

Tomemos el mismo problema.

SOLUCION POR QUEBRADOS COMUNES

$$2077 : 24 \text{ d. } 19 \text{ h. } 12 \text{ m.} = 2077 : 24\frac{1152}{1440}$$

$$= 2077 : 24\frac{288}{360} = 2077 : 24\frac{72}{90}$$

$$= 2077 : 24\frac{36}{45} = 2077 : 24\frac{4}{5} = 2077 : \frac{124}{5}$$

$$= \frac{2077 \times 5}{124} = \frac{10385}{124} = 83\frac{93}{124} \textit{ leguas}$$

y reduciéndolo á complejo será

= **83** lg. **30** cd.

resultado igual al anterior.

Tercer método.—Se procede análogamente al *primer* caso:

Ejemplo:

Tómese el mismo problema.

SOLUCION POR DECIMALES

2077 : **24** ds. 19 h. **12** m. = 2077 : 24,8

= 83,75 leg.

equivalente á **83** lg. **30** cd.

332. TERCER CASO.—Para dividir **un complejo por otro complejo** de la misma especie, se pueden aplicar los tres métodos indicados.

Primer Método. — Para aplicar el *método de las reducciones* se reducirán los complejos á la menor especie indicada en ellos y en seguida se efectúa la división como si fueran incomplejos y se valúan los resíduos que se obtengan en subdivisión de la unidad asignada al cociente.

Ejemplo:

Qué cantidad de vino se puede conseguir con 209 @ 15 lb. 10 onz. *de aceite, á razón de* 8 @ *y* 15 lb. *por cada pipa.*

SOLUCIÓN POR REDUCCIONES

	209 @ 15 lb 10 onz.	
	× 25	*libras*
	1045	
	418	
	5225	
	+ 15	
libras	5240	
	× 16	*onzas*
	83840	
	+ 10	
Dividendo	83850	
	15050	
1er *Residuo*	1290	
	× 4	*cuarterolas*
2° *Dividendo*	5160	
2° *Residuo*	1720	
	× 48	*frascos*
	13760	
	6880	
3er *Dividendo*	82560	
	13760	
	00000	

8 @ 15 lb	
× 25 lb	
200	
+ 15	
215 lb	
× 16 onz.	
1290	
215	
3440	*Divisor*
24 p. **1** ct. **24** fr.	

SOLUCION POR QUEBRADOS COMUNES

$$209 \text{ @ } 15 \text{ lb } 10 \text{ onz.} : 8 \text{ @ } 15 \text{ lb} = 209 \frac{250}{400} : 8 \frac{240}{400}$$

$$= 209 \frac{25}{40} : 8 \frac{24}{40} = 209 \frac{5}{8} : 8 \frac{6}{10}$$

$$= 209 \frac{5}{8} : 8 \frac{3}{5} = \frac{1677}{8} : \frac{43}{5}$$

$$= \frac{1677 \times 5}{8 \times 43} = \frac{8385}{344} = 24 \text{ Pp. } \frac{129}{344}$$

y reduciéndolo á complejo

= **24** Pp. **1** Ct. **24** frs.

SOLUCIÓN POR DECIMALES

209 @ 15 lb 10 onz. : 9 @ 15 lb = 209,625 : 8,60
= 24,375 Pipas

y reduciéndolo á complejo

= **24** Pp. **1** Ct **24** frs.

333. CUARTO CASO.—Cuando se tiene que **dividir un complejo por otro complejo** de diferente especie, podremos tambien aplicar los tres métodos enunciados.

Primer Método.—Para dividir *un complejo por otro* aplicando el método de las reducciones se reducen los complejos del dividendo y divisor á la menor especie indicada en el problema.

Se efectúa la división y el cociente representará unidades inferiores de las que hay en el dividendo.

Finalmente, se podrá reducir el incomplejo así obtenido á complejo.

Ejemplo:

Sabiéndose que se han construído 899 v. 0 p. 2 pl 3 ln. *de pared en* 34 d. 3 h., *se desea saber cuántas varas se habrán construído por día, siendo el día de trabajo de* 12 *horas.*

SOLUCION POR REDUCCIONES

899 v. **0** p. **2** pl. **3** ln. **:** **34** d. **3**.

× 3

piés 2897

× 12

5394

2697

32364

\+ 2

pulgadas 32366 — **34** d.

× 12 — × 12 *horas de trabajo*

64732 — 68

32366 — 34

388392 — 408

\+ 3 — + 3 *horas*

líneas 388395 | 411 h. *Divisor*

1849 — 945 *líneas por hora.*

2055 — × 12

0000 — 1890

945

líneas por día 11340 | 12 ln.

54 — 945 | 12 pl.

60 — 105 — 78 | 3

0 pl. — 9 — 18 — **26** v.

p. **0**

luego

899 v. 0 p. 2 pl. 3 ln. : 34 d. 3 h. = **26** v. **0** p. **9** pl.

Solución por quebrados comunes

$$899 \text{ v. } 0 \text{ p. } 2 \text{ pl. } 3 \text{ ln. } : 34 \text{ d. } 3 \text{ h.} = 899\frac{27}{432} : 34\frac{1}{4}$$

$$= 899\frac{3}{48} : 34\frac{1}{4} = 899\frac{1}{16} : 34\frac{1}{4} = \frac{14385}{16} : \frac{137}{4}$$

$$= \frac{57540}{2192} = \frac{14385}{548} = 26\frac{137}{548} = 26\frac{1}{4} \textit{ varas}$$

y reduciéndolo á *complejo*

= **26** v. **0** p. **9** pl.

Solución por decimales

$$899 \text{ v. } 0 \text{ p. } 2 \text{ pl. } 3 \text{ ln. } : 34 \text{ d. } 3 \text{ h.} = 899\frac{27}{432} : 34\frac{1}{4}$$

$$= 899{,}0625 : 34{,}25 = 26{,}25 \textit{ varas}$$

y reduciéndolo á *complejo*

= **26** v. **0** p. **9** pl.

Problemas

1° Qué cantidad de café habrá traído al puerto de Buenos Aires el vapor «Porteño», sabiéndose que ha embarcado 3473 qq., 2 @ 19 ℔ en Pernambuco; 2346 qq. 1 @ 8 ℔ en Bahía y 194 qq. 18 ℔ en Río Janeiro, y que viéndose en peligro de naufragar tuvo que arrojar al agua 2342 qq. 11 ℔ 9 onz.

2° Suponiendo que un hombre necesita 144 metros cúbicos diarios de aire puro para respirar libremente, se desea saber, qué capacidad debería tener una habitación perfectamente cerrada para que pudiera respirar 15 d. 9 h. 17 m.

3° He permutado 248 Pp. 3 bt. 12 frascos de vino tinto por una cierta cantidad de azúcar. Se desea saber cuantas arrobas de azúcar deberé recibir, sabiendo que por una pipa de vino se me deben entregar 47 @ 18 ℔ 7 onz.

4° Habiendo envasado 673 @ 18 ℔ 12 onzas, de yerba en 194 barricas de igual capacidad, deseo saber qué cantidad de yerba contendrá cada barrica.

5° Se ha comprado, con 8965 $, una partida de paño de 2765 v. 2 p. 3 pls. Deseo saber cuanto me habrá costado la vara.

6° Habiendo recibido por el vapor «América» 478 Pp. 3 bt. 19 frs. de vino, y por el vapor «Sirio» 765 Pp 2 bts. 34 frs, he vendido 1047 Pp. y 2 bt. á un comerciante y el resto lo he permutado por carbón de piedra á razón de 3 Tn. 14 qq. 2 @ por pipa de vino, y por último, entregué el resto en cambio de un terreno, á razón de 1 Tn. 16 qq. 1 @ de carbón por cada vara cuadrada. Se desea conocer el área del terreno adquirido.

CAPÍTULO VI.

COMPARACION DE LOS NUMEROS.

Igualdades

333. En el estudio que hemos hecho hasta ahora, más de una vez se nos ha presentado una expresión aritmética de la forma

$$3 + 5 = 17 - 9$$

$$\frac{8}{4} + 5 = 2 \times 9 - 11 \qquad \text{etc.}$$

esto es lo que constituye una **igualdad.**

Luego, **Igualdad** es un conjunto de números y signos aritméticos, separado de otro conjunto, por medio del signo =.

La espresión aritmética que está á la *izquierda* del signo = se llama **primer miembro** y la espresión que está á la *derecha* se llama **segundo miembro.**

En las igualdades anteriores $3 + 5$ y $\frac{8}{4} + 5$ son los *primeros miembros* y $17 - 9$ y $2 \times 9 - 11$ serán los *segundos miembros.*

—Cuando el primero y segundo miembro son *idénticos*, la igualdad toma el nombre de **Identidad,** como

$$8 = 8$$

$$3 \times 4 = 3 \times 4$$

y cuando entre las cantidades entra alguna cantidad desconocida ó *incógnita*, la igualdad toma el nombre de **Ecuación**, como

$$3x = 8 - 3$$

donde suponemos que x es una *cantidad desconocida.*

Generalmente se usan las últimas letras del alfabeto para representar las incógnitas.

334. Todos los números ó cantidades que están en uno ú otro miembro afectados con el signo *más* ó *menos*, se llaman *términos.*

Así en la igualdad

$$3 + 5 = 17 - 9$$

hay cuatro *términos* que son 8, 5, 17 y 9.

335. Además de los *dos valores* que hemos asignado hasta ahora á los números, es decir, además del *valor absoluto y valor relativo*, se les ha asignado un nuevo valor que depende de su *modo de influir* en la cuestión que se trata de resolver.

Ahora bien, al resolver cualquier problema hay cantidades que *tienden al fin que se propone el calculador* y cantidades *que tienden al fin contrario.*

Las primeras cantidades toman el nombre de **positivas** y las segundas **negativas.**

Si se tratara de hallar la *ganancia* obtenida por un comerciante y después de haber hecho el Balance se encontrará que el comerciante ha *perdido* 500 $, esta cantidad será una *cantidad negativa.*

Todas las cantidades que forman el *haber* serían *positivas* y las cantidades que forman el *debe* serían *negativas.*

Se ha convenido en poner el signo + á las cantidades positivas, pues ellas tienden á *aumentar* el resultado que se busca, y como las cantidades negativas tienden á *disminuir* el resultado, se les antepone el signo — .

336. De modo, pues, que de aquí en adelante el signo + y el signo — tendrán *dos acepciones*, una que la de *indicar la operación* de adición y sustracción, y es otra la de indicar el modo de influir esa cantidad, en la operación.

Se comprende, que *de dos cantidades negativas será mayor*, la que tenga *menor valor numérico.*

337. De lo dicho se desprende, que hay cantidades *menores que cero,* en cuanto á su valor relativo, pues si se tratara en valor absoluto, eso sería imposible, pues el cero representa* la *carencia absoluta de cantidad.*

De manera, que cuando se toman los *números en* *general,* debe definirse el *cero,* diciendo que *es el límite hacia el cual tienden las cantidades positivas y negativas.*

338 Conociendo esto, podemos pasar á indicar algunas:

Propiedades de las igualdades.

I.

339. *Aunque se inviertan los miembros de una igualdad, esta no varía.*

Es decir

$$8 - 2 = 5 + 1$$

es lo mismo que

$$5 + 1 = 8 - 2$$

II.

340. *Todo número que esté en un miembro con el signo* **más**, *puede pasar al otro miembro con el signo* **menos.**

Tengamos la igualdad

$$3 \times 2 + 6 = 14 - 2 \qquad (1)$$

digo que puedo pasar el **6** al segundo miembro, con tal que pase con el signo *menos*, es decir que tendremos

$$3 \times 2 = 14 - 2 - 6$$

III.

341. *Todo número que está en un miembro con el signo* **menos**, *puede pasar al otro miembro con el signo* **más**.

Si tenemos

$$8 - 3 = 4 + 1 \qquad (1)$$

digo que

$$8 = 4 + 1 + 3$$

IV.

342. *Todo número que es* **divisor** *en un miembro pasará al otro miembro como* **factor**.

Es decir, que si tenemos

$$\frac{16}{8} = 5 - 3 \qquad (1)$$

según este principio resultará

$$16 = (5 - 3) \times 8$$

V.

343. *Todo número que es* **factor** *en un miembro, pasará al otro miembro como* **divisor**.

Si tenemos

$$5 \times 7 = 3 \times 8 + 11 \qquad (1)$$

resultará que

$$5 = \frac{3 \times 8 + 11}{7}$$

VI.

344. *Si uno de los miembros de la igualdad está elevado á una* **potencia**, *se puede hacer desaparecer el exponente, extrayendo la* **raiz** *del mismo grado del otro miembro.*

Si se tiene

$$(7 - 2)^3 = 5 \times 8 - 15 \quad (1)$$

se tendria que

$$7 - 2 = \sqrt[3]{5 \times 8 - 15}$$

VII.

345. *Si uno de los miembros de la igualdad está afectado del signo* **radical**, *puede hacerse desaparecer elevando el otro miembro á una* **potencia** *cuyo grado es el del índice radical.*

Teniendo

$$\sqrt[3]{220 - 4} = 15 - 9 \quad (1)$$

se sacará

$$220 - 4 = (15 - 9)^3$$

Desigualdades.

346. Cuando se quiere expresar que una cantidad es *mayor* que otra, se interpone entre las dos cantidades el signo $>$, correspondiendo la cantidad *mayor* á la abertura del ángulo, y la cantidad *menor*, al lado del vértice.

Si queremos escribir que *$8 + 3$ es mayor que 5*, diríamos.

$$8 + 3 > 5$$

Que también podría escribirse

$$5 < 8 + 3$$

y se leería *5 menor* que *$8 + 3$*.

La cantidad que está á la izquierda se llama *primer* miembro de la *desigualdad*, y la que está á la derecha *segundo miembro*.

347. Las **propiedades** que necesitamos conocer de las *desigualdades*, son las mismas que las de las igualdades, es decir

I.

Todo número puede pasar de un miembro á otro, con tal que se le cambie de signo.

Si tenemos

$$8 + 7 > 12$$

tendremos

$$8 > 12 - 7$$

Igualmente si tuviéramos

$$15 - 9 > 12 - 8$$

saldría

$$15 > 12 - 8 + 9$$

II

Todo divisor ó factor de un miembro puede pasar al otro miembro con tal que se ponga como factor ó divisor.

Si tuviéramos

$$8 \times 3 < 40$$

saldría

$$8 > \frac{40}{3}$$

Del mismo modo, si se nos diera

$$\frac{16}{2} > 4$$

tendríamos

$$16 < 4 \times 2$$

III.

Si un miembro de una desigualdad está bajo un signo radical ó elevado á una potencia, se puede hacer desaparecer el signo ó el esponente; elevando á una potencia ó estrayendo la raíz del otro miembro.

Si tuviéramos

$$\sqrt[3]{125} > 8 - 5$$

saldría

$$125 > (8 - 5)^3$$

Análogamente, si tuviéramos

$$(8 + 2)^2 < 115$$

tendríamos

$$8 + 2 < \sqrt{115}$$

348. Puede presentarse el caso de tener

$$8 > 6 > 4 > 2$$

En cuyo caso, cada cantidad de estas será mayor que las otras cantidades que están á su derecha, es decir que tendríamos

$8 > 6$	$6 > 4$
$8 > 4$	$6 > 2$
$8 > 2$	$4 > 2$

Equidiferencias.

349. *Se llama* **razón**, *el resultado de la comparación de dos cantidades de una misma especie.*

Por medio de la *comparación*, se trata de ver cual es el *exceso* que una cantidad lleva á la otra ó el *número de veces* que una cantidad *contiene* á otra.

Así, los números

20 y 5

se pueden comparar de las siguientes maneras:

$$20 - 5 = 15$$
$$20 : 5 = 4$$

En el primer caso se llama **razón aritmética** ó **diferencia** y en el segundo caso, *razón geométrica ó cociente.*

Por ahora solo nos ocuparemos de las primeras.

350. Hemos visto que la *razón aritmética* de los números **20** y **5** era **15**, lo cual se escribe

$$20 \,.\, 5 = 15$$

y se leerá **20** *es aritméticamente á* **5**.

También se puede indicar

$$20 - 5 = 15$$

La cantidad que se compara se llama *antecedente* y aquella con la cual se compara toma el nombre de *consecuente*.

En la razón aritmética

$$20 \,.\, 5$$

20 es el *antecedente*
5 es el *consecuente*.

351. Siendo pues la razón aritmética, una diferencia, se comprende que la razón no variará *si se le agrega ó quita una misma cantidad.*

Si tenemos la razón aritmética

$$8 \,.\, 5$$

se tendrá que

$$8 \,.\, 5 = (8 + 3) \,.\, (5 + 3)$$

Efectivamente

$$8 \,.\, 5 = 8 - 5 = 3$$

y también

$$(8 + 3) \,.\, (5 + 3) = 11 \,.\, 8 = 11 - 8 = 3$$

luego, se verifica el principio.

Lo mismo sucedería si se le quitara una misma cantidad.

352. Cuando se tienen *dos razones aritméticas* iguales se forma una **equidiferencia** ó **proporción aritmética.**

Así, si tenemos

$$8 - 3 = 16 - 11$$

tendremos formada una *equidiferencia ó proporción aritmética,* también se puede escribir

8 . 3 : 16 . 11

y se lee **8** *es aritméticamente á* **3** *como* **16** *es* á **11**.

Los números 8, 3, 16 y 11 toman el nombre de *términos de la proporción.*

Los números **8** y **11**, *primero y último* se llaman *extremos* y los números **3** y **16**, se les dá el nombre de *medios.*

353. Cuando los medios son iguales como en la proporción

8 . **6** : **6** . 4

se dice que la proporción es ***continua,*** y si los medios son desiguales como

11 . 4 : 25 . 18

se llama proporción *discreta.*

La proporción contínua suele también escribirse sin repetir el medio común.

÷ 8 . 6 . 4

y se leerá *como* 8 *es aritméticamente á* **6** *es á* 4.

354. El **Teorema fundamental** de las proporciones **aritméticas** es

La suma de los extremos es igual á la suma de los medios.

Si tenemos

8 . 5 : 10 . **7**

digo que

$$8 + 7 = 5 + 10$$

Efectivamente, la proporción

$$8 . 5 : 10 . 7$$

se puede escribir

$$8 - 5 = 10 - 7$$

Pasando **5** *al segundo* miembro y **7** *al primero* (**341**) con sus signos correspondientes, resultará

$$8 + 7 = 10 + 5$$

Q. E. L. Q. D. D.

355. *Si la proporción es continua* tendremos que:
La suma de los estremos es igual al duplo del término medio.

Si tenemos la proporción *contínua*

$$8 . 5 : 5 . 2$$

que se puede escribir

$$8 - 5 = 5 - 2$$

y pasamos **5** al segundo miembro y **2** al primero, saldrá

$$8 + 2 = 5 + 5$$

es decir

$$8 + 2 = \mathbf{2} \times 5$$

Q. E. L. Q. D. D.

356. Esta *propiedad fundamental* nos permite determinar un término cualquiera de una proporción aritmética discreta ó contínua, conociendo *tres* de sus términos *en la discreta* y *dos* de los términos *en la contínua.*

De aquí podemos deducir los siguientes **principios.**

I.

357. *Un* **extremo** *de una proporción aritmética discreta es igual á la suma de los medios, menos el extremo conocido.*

Si tuviéramos

$$9 \,.\, 6 : 8 \,.\, x$$

siendo x el extremo desconocido, tendríamos (354)

$$x + 9 = 8 + 6$$

y pasando **9** al segundo miembro

$$x = (\mathbf{8} + \mathbf{6}) - \mathbf{9} = 14 - 9 = \mathbf{5}$$

Q. E. L. Q. D. D.

II.

358. *Un* **extremo** *en una proporción aritmética continua ó el tercero diferencial, es igual al duplo del medio menos el extremo conocido.*

Si tenemos

$$10 \,.\, 6 : 6 \,.\, x$$

sabemos que (355)

$$x + 10 = 2 \times 6$$

y pasando 10 al segundo miembro

$$x = \mathbf{2} \times \mathbf{6} - \mathbf{10} = 12 - 10 = \mathbf{2}$$

Q. E. L. Q. D. D.

III.

359. *Un* **medio** *en una proporción aritmética discreta, es igual á la suma de los extremos, menos el medio conocido.*

Si se nos dá

$$18 \,.\, 9 : x \,.\, 3$$

sabemos que

$$x + 9 = 18 + 3$$

pasando 9 al segundo miembro

$$x = (18 + 3) - 9 = 21 - 9 = 12$$

Q. E. L. Q. D. D.

IV.

360. *El término* **medio** *de una proporción aritmética continua ó el medio diferencial es igual á la mitad de la suma de los extremos.*

Si se nos dá

$$10 \,.\, x : x \,.\, 6$$

sabemos que

$$2 \times x = 10 + 6$$

y pasando el *factor* **2** al segundo miembro **(343)**

$$x = \frac{10 + 6}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

Q. E. L. Q. D. D.

Progresiones Aritméticas.

361. *Las* **progresiones aritméticas** *llamadas también* **progresiones por diferencia**, *son una série de números tales que cada uno es igual al que le sigue ó al que le precede aumentando de una cantidad constante llamada* **razón**.

Cada número de la progresión se llama *término.*

362. Para *expresar* que varios números están en progresión aritmética, se escriben los números los unos á continuación de los otros, con la interposición de *un punto* y poniendo á la izquierda de la série de números, el signo ÷

Entónces, para expresar que los números **3**, **7**, **11**, **15**, **19** están en progresión aritmética, *escribiríamos*

$$\div\ 3\ .\ 7\ .\ 11\ .\ 15\ .\ 19$$

y se leerá: *como* **3** *es á* **7**, *es á* 11, *es á* 15...

Como observamos, cada término es igual al anterior *aumentado de 4*, es decir

$$\begin{aligned} 7 &= 3 + 4 \\ 11 &= 7 + 4 \\ 15 &= 11 + 4 \end{aligned}$$

luego, *la razón es 4*.

Esta progresión, en que los términos *van aumentando*, toma el nombre de *progresión* **creciente**.

Si se tuviera la misma progresión invertida

$$\div\ 19\ .\ 15\ .\ 11\ .\ 7\ .\ 3$$

se dice que la progresión es **decreciente** y su razón es — **4**.

363. Se debe observar que una progresión aritmética es una série de *equidiferencias* ó *progresiones continuas*, en la que cada término, es simultáneamente antecedente y consecuente, exceptuando el *primer término* que es solo *antecedente* y el *último* que es solo *consecuente*.

364. Cuando el número de términos de una progresión es limitado, se dice que la progresión es *limitada* y cuando el número de términos no tiene límites se dirá que es una progresión *ilimitada*.

Pasemos ahora á estudiar algunos **principios** *importantes* de las *progresiones aritméticas*.

I.

365. Un término cualquiera *de una progresión aritmética es igual al primero, más tantas veces la razón como términos le anteceden.*

Efectivamente, tengamos la progresión

$$\div\ a\,.\,b\,.\,c\,.\,d\ \ldots\ldots\ h\,.\,k\,.\,l\ \ldots$$

en que *queremos determinar un término cualquiera l, que ocupa el lugar n.*

Llamemos r la razón de la progresión y tendremos según definición

$$\begin{aligned} b &= a + r \\ c &= b + r \\ d &= c + r \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} b &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = a + r \\ c &= (a + r) + r \quad = a + 2\,r \\ d &= (a + 2\,r) + r = a + 3\,r \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

y por analogía

$$l = a + (n - 1)\, r \qquad (1)$$

Si la progresión fuera *decreciente*, la expresión sería

$$l = a - (n - 1)\, r \qquad (1')$$

II.

366. La suma de dos términos *equidistantes de los extremos de una progresión aritmética, es igual á la suma de los extremos.*

Tengamos la progresión

$$\div\ a . b . c \ldots\ldots x . \ldots\ldots y . \ldots\ldots h . k . l$$

en que suponemos que x é y equidistan de los extremos y que r es la razón de la progresión

Supongamos también que haya p términos antes que x y p términos después de y, luego la ecuación (1) nos dará

$$x = a + p\, r \qquad (2)$$

y suponiendo tener una progresión que empieza en y y termina en l, también tendremos

$$l = y + p\, r$$

ó bien

$$y + p\, r = l$$

y pasando $p\, r$ al segundo miembro, saldrá

$$y = l - p\, r \qquad (3)$$

Sumando esta ecuación y la (2), nos dará

$$x + y = (a + pr) + (l - pr)$$

es decir

$$x + y = a + pr + l - pr$$

y como

$$pr - pr = o$$

nos dará finalmente

$$x + y = a + l$$

Q. E. L. Q. D. D.

III.

367. La suma de todos los términos *de una progresión aritmética, es igual al producto de la suma de los extremos, por la mitad del número de términos.*

Sea la progresión aritmética

$$\div a . b . c \ldots . h . k . l$$

Sumando los términos de la progresión y llamando *S* la suma saldrá

$$S = a + b + c + \ldots . + h + k + l \qquad (4)$$

pero como el órden de los sumandos no altera la suma, podremos escribirlos en sentido contrario y tendríamos

$$S = l + k + h + \ldots .. + c + b + a \qquad (5)$$

y sumando término á término las igualdades (4) y (5) saldrá

$$(S + S) = (a + l) + (b + k) + (c + h) + \ldots . + (h + c) +$$
$$+ (k + b) + (l + a)$$

pero, como cada una de estas sumas parciales es igual á $(a + l)$, tendremos

$$2S = (a + l) + (a + l) + (a + l) + \ldots + (a + l) + \\ + (a + l) + (a + l)$$

y como hemos supuesto que había *n* términos, resultará

$$2\,S = (a + l) \times n$$

y pasando **2** al segundo miembro resultará

$$S = \frac{(a + l) \times n}{2} \qquad (6)$$

que es el principio que queríamos demostrar.

368. Interpolar entre dos números cualesquiera **a** y **l**, un número **m** de *medios diferenciales*, es formar una *progresión aritmética*, en que **a** es el primer término, **l** el último y **m + 2** el número de términos.

Para poder pues formar esa progresión, *es necesario determinar la razón*, lo cual podremos hacer valiéndonos de la ecuación (1) que nos dá

$$l = a + (n - 1)\,r$$

en la cual

$$n = m + 2$$

luego, sustituyendo saldrá

$$l = a + (m + 2 - 1)\,r$$

ó bien

$$l = a + (m + 1)\,r$$

ó sea

$$l - a = (m + 1) \times r$$

de donde

$$r = \frac{1 - a}{m + 1}$$

lo cual nos dice, que *para determinar la razón de la progresión*, se divide la *diferencia de los números dados por el número de términos que se quiere interpolar, más uno.*

EJERCICIOS:

1°

Determinar el 9° término de una progresión aritmética cuyo primer término es **5** *y la razón es 3.*

Aplicando la fórmula (1)

$$l = a + (n - 1)\,r$$

saldrá

$$l = 5 + (9 - 1) \times 3$$

ó bien

$$l = 5 + 8 \times 3 = 5 + 24$$

de donde

$$l = \mathbf{29}$$

Efectivamente, formando la progresión

5 . 8 . 11 . 14 . 17 . 20 . 23 . 26 . **29**

queda comprobado el resultado.

2°

Determinar la suma de los **10** *primeros términos de la progresión.*

1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 . 17 . 19

La fórmula (6) nos dá

$$S = \frac{(a + 1)\,n}{2}$$

y sustituyendo valores

$$S = \frac{(1 + 19) \times 10}{2}$$

ó bien

$$S = \frac{20 \times 10}{2} = \frac{200}{2}$$

es decir

$$\mathbf{S = 100}$$

problema que nos muestra una propiedad curiosa de la suma de los números impares de la numeración decimal, y nos dice que esa suma que será *igual al cuadrado del número de términos.*

3°

Se desea saber cuantos metros deberá recorrer un individuo que se ha comprometido á cargar y trasportar 100 carretillas de arena depositándolas á orillas de un camino, á distancia de 6 metros uno de otro montón, en el supuesto de que el primer montón ha sido depositado á la distancia de 40 metros y que al fin debe dejar la carretilla en el depósito de donde estrajo la arena.

Este problema se resuelve por medio de las progresiones aritméticas, observando que las carretillas se irán descargando á distancia de

$$\begin{array}{r} 40^{m} \\ 40 + \mathbf{6} = 46^{m} \\ 40 + \mathbf{12} = 52\phantom{^{m}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

es decir pues, que las distancias serán como los términos de una progresión aritmética, cuyo primer término **40**, la razón **6** y el número de términos **100**, luego podemos hallar el último término por medio de la fórmula

$$l = a + (n - 1) r$$

y tendríamos

$$l = 40 + (100 - 1) \times 6$$
$$l = 40 + 99 \times 6$$
$$l = 40 + 594$$
$$l = \mathbf{634}$$

Ahora bien, la distancia que habrá recorrido el peón estará dada *por el doble de* la suma de todos los términos de esa progresión, pues tiene viage de *ida* y viage de *vuelta* y haciendo uso de la fórmula

$$S = \frac{(a + l) n}{2}$$

y sustituyendo los valores sale

$$S = \frac{(40 + 634) \times 100}{2}$$

de donde

$$S = \frac{674 \times 100}{2}$$

ó bien

$$S = \frac{67400}{2} = 33700$$

pero S, según digimos antes, no es más que la distancia recorrida al ir á descargar la arena, luego habrá que duplicar esa distancia y saldrá

$$D = \mathbf{67400}$$

Razones y Proporciones.

369. Ya hemos visto que se llama **razon** de dos números, *el resultado de la comparación* de esos números, y que si la comparación se efectuaba para hallar la *diferencia* de dos números, se formaba una *razón aritmética*, y si se efectuaba para deteminar las veces que una cantidad contiene á otra, se formaba una *razón geométrica*.

Ya nos hemos ocupado de la primeras y ahora nos ocuparemos de estudiar las *razones geométricas*.

370. Las **razones geométricas** se indican separando sus dos *términos* por medio de dos puntos (:) ó dándole la forma de quebrado, siendo el *antecedente* el *numerador* del quebrado, y el *consecuente* el *denominador*.

Para expresar la *razón* de los números **5** y **8**, se escribirá

$$5 : 8 \text{ ó bien } \frac{5}{8}$$

y se leerá *cinco es á ocho*.

Aqui, **5** es el *antecedente* y **8**, el *consecuente*.

371. De lo dicho, se desprende que las *razones geométricas pueden equipararse á los quebrados*, luego les son aplicables las mismas **propiedades** que demostramos para los quebrados comunes.

La *Propiedad fundamental de las razones* es que:

No se altera el valor de una razón (141) *multiplicando ó dividiendo ambos términos de la razón por un mismo número.*

Es decir que

$$\frac{15}{18} = \frac{15 \times 2}{18 \times 2} = \frac{15 : 3}{15 : 3}$$

ó bien

$$\frac{15}{18} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

372. Se dice que dos razones son *recíprocamente inversas*, cuando *el antecedente* de una de ellas *es igual al consecuente* de la otra y *vice versa;* es decir, cuando *invirtiendo los términos* de una razón, se obtienen dos razones iguales.

Así

$$\frac{8}{3} \text{ y } \frac{3}{8}$$

son razones recíprocamente inversas.

373. Se llama **razon compuesta** la que se obtiene multiplicando entre sí los *antecedentes* y entre sí los *consecuentes* de varias razones.

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}$$

la razón compuesta sería

$$\frac{2 \times 4 \times 6}{3 \times 5 \times 7}$$

374. Se llama **Proporcion Geométrica**, *la igualdad de dos razones* geométricas.

Así

$$\frac{15}{5} = \frac{21}{7}$$

es una *proporción geométrica* que también se puede escribir

$$15 : 5 : : 21 : 7$$

leyéndose en uno y otro caso *15 es á 5 como 21 es á 7.*

El *primero* y *último* término, se llaman **extremos** de la proporción y el *segundo* y *tercero*, **medios.**

Aquí

15 y **7** son los *extremos.*
5 y **21** son los *medios.*

Cuando los *medios son iguales*, se dice que la proporción es **continua** y el medio común se llama *medio proporcional.*

La proporción

$$\frac{3}{6} = \frac{6}{12}$$

es una proporción *continua*, donde **6** es el *medio proporcional* y se suele escribir

$$\div\!\div\ 3 : 6 : 12$$

en cuyo caso se leerá *como* 3 *es á* 6 *es á* 12.

375. Toda proporción se puede *alternar, invertir* y *permutar.*

Alternar es comparar *antecedente* con *antecedente* y *consecuente* con *consecuente* de las dos razones.

Si tenemos la proporción

$$\frac{6}{9} = \frac{10}{15}$$

la proporción *alternada* sería

$$\frac{6}{10} = \frac{9}{15}$$

Invertir es comparar *consecuente* con *antecedente* en cada razón.

Si se tuviera la proporción

$$\frac{4}{8} = \frac{6}{12}$$

invertida sería

$$\frac{8}{4} = \frac{12}{6}$$

Permutar *es cambiar de lugar* las razones.

Si tuviéramos la proporción

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$$

la proporción *permutada* sería

$$\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Pasemos ahora á ocuparnos de algunas importantes:

Propiedades de las Proporciones.

I.

376. *En toda proporción geométrica el producto de los medios es igual al producto de los extremos.*

Es decir que en la proporción

$$\frac{4}{6} = \frac{8}{12}$$

se verificará que

$$4 \times 12 = 6 \times 8$$

Efectivamente, para demostrar esto nos bastara pasar *el divisor* **6** al segundo miembro y *el divisor* **12** al primero, las que pasarán como *factores* y nos reproducirán la igualdad

$$4 \times 12 = 6 \times 8$$

Q. E. L. Q. D. D.

II.

377. *En toda proporción continua el producto de los extremos és igual al cuadrado del medio.*

Es decir que la proporción

$$\frac{8}{4} = \frac{4}{2}$$

tendremos

$$8 \times 2 = 4^2$$

Esto es evidente, pues el primer principio nos dá

$$8 \times 2 = 4 \times 4$$

es decir

$$8 \times 2 = 4^2$$

Q. E. L. Q. D. D.

III.

378. Un extremo *de una proporción es igual al producto de los medios divividos por el extremo conocido.*

Tengamos la proporción

$$\frac{3}{6} = \frac{4}{x}$$

en la que queremos *hallar el extremo* desconocido.

Aplicando lo demostrado en el primer principio (376) saldrá

$$3 \times x = 4 \times 6$$

y pasando *el factor* 3 al segundo miembro

$$x = \frac{4 \times 6}{3} = \frac{24}{3} = 8$$

Q. E. L. Q. D. D.

IV.

379. Un extremo *de una proporción continua es igual al cuadrado del medio dividido por el otro extremo.*

Sea la proporción continua

$$\frac{4}{8} = \frac{8}{x}$$

Sabemos que (377)

$$x \times 4 = 8^2$$

y pasando 4 al segundo miembro

$$x = \frac{8^2}{4} = \frac{64}{4} = 16$$

Q. E. L. Q. D. D.

VI.

380. Un medio *de una proporción es igual al producto de los extremos divididos por el medio conocido.*

Si tuviéramos la proporción

$$\frac{5}{10} = \frac{x}{40}$$

sabemos que (376)

$$x \times 10 = 5 \times 40$$

luego saldrá

$$x = \frac{5 \times 40}{10} = \frac{200}{10} = 20$$

Q. E. L. Q. D. D.

VII.

381. El **medio** *de una proporción contínua es igual á la raíz cuadrada del producto de los extremos.*

Teniéndose la proporción contínua

$$\frac{4}{x} = \frac{x}{16}$$

tendremos (377)

$$x^2 = 4 \times 16$$

y haciendo desaparecer el exponente del primer miembro.

$$x = \sqrt{4 \times 16} = \sqrt{64} = 8$$

Q. E. L. Q. D. D.

Progresiones Geométricas.

382 *Las* **Progresiones Geométricas** *llamadas también* **progresiones por cociente**, *son una série de números tales, que cada uno es igual al anterior* **multiplicado** *por una cantidad constante, llamada razón.*

Cuando *la razón es mayor que la unidad*, los términos de la progresión irán *aumentando* y entonces la progresión se llama **creciente**.

Si *la razón es menor que la unidad*, los términos de la progresión irán *disminuyendo* y en ese caso la progresión se llamará **decreciente**.

383. Para indicar que varios números están en progresión, se escribirán ordenadamente los unos á continuación de los otros, con la interposición de dos puntos y colocando á la izquierda de la série el signo $\div\div$

Así para indicar que los números 3, 6, 12, 24, 48 están en *progresión geométrica* se escribirá

$$\div\div\ 3 : 6 : 12 : 24 : 48$$

y se leerá: *como* 3 *es á* 6, *es á* 12, *es á* 24, *es á* 48.

Como se observa, *cada uno de los términos es igual al anterior multiplicado por* **2** y este número **2** será la **razon** de la progresión creciente.

384. Si escribiéramos la progresión anterior en un órden inverso, se tendría la progresión *decreciente*.

$$\div\div\ 48 : 24 : 12 : 6 : 3$$

en que $\frac{1}{2}$ *es la razón*, pues cada término es igual al anterior, multiplicado por la cantidad constante $\frac{1}{2}$.

—Debemos *observar*, como lo hicimos en las *progresiones ariméticas*, que una progresión geométrica es una série de proporciones contínuas, en la que cada término de la progresión es simultáneamente antecedente y consecuente, con excepción del *primer término* que es solo antecedente y el *último término* que solo es consecuente.

Igualmente, toma el nombre, de progresión *limitada ó ilimitada* según sea limitado ó ilimitado el número de términos de la progresión.

Podemos ahora pasar á estudiar algunas importantes

Propiedades de las Progresiones Geométricas.

I.

385. **Un término cualquiera** *de una progresión geométrica, es igual al primero, multiplicado por una potencia de la razón cuyo exponente es igual al número de términos que le preceden.*

Sea la progresión

$$\because a : b : c : .... : h : k : l ....$$

y si llamamos q la razón tendremos que:

$$a = a$$
$$b = aq$$
$$c = b \times q = aq \times q = aq^2$$
$$d = c \times q = aq^2 \times q = aq^3$$
$$.............................$$

donde observamos que cada término es igual al primero multiplicado por la razón elevado á una potencia expresada por el número de términos que hay antes que él.

Así, el *tercer* término **c**, está formado por el producto de a y $q^2 = q^{3-1}$; **d** por el producto de a y $q^3 = q^{4-1}$, luego, si tomamos el término **l**, que ocupa el *enésimo* lugar, se tendría

$$l = a\,q^{n-1}$$

Esta igualdad nos da

$$a = \frac{1}{q^{n-1}}$$

fórmula que nos permite *hallar el 1er término,* conociendo el último, la razón y el número de términos.

Q. E. L. Q. D. D.

II.

386. El producto de dos términos equidistantes *de los extremos de una progresión geométrica, es igual al producto de los extremos.*

Tengamos la progresión geométrica.

$$\div\!\div \; a : b : c : \ldots . \; h : k : l$$

Imaginemos dos términos c y h equidistantes de los extremos a y l, es decir, supongamos que el término c tenga m términos *antes* que él y que el término h, tenga también m términos *después* de él.

Entónces, si suponemos que se tiene una progresión que empieza en a y termina en c, saldrá

$$c = aq^m \qquad (1)$$

Si suponemos también, tener una progresión que empieza en h y termina en l, saldrá

$$l = hq^m$$

y pasando q^m al otro miembro, tendremos

$$h = \frac{1}{q^m} \qquad (2)$$

Si multiplicamos las igualdades (1) y (2) miembro á miembro, resultará

$$c \times h = aq^m \times \frac{1}{q^m} = \frac{a \times 1 \times q^m}{q^m}$$

ó bién

$$c \times h = a \times 1$$

Q. E. L. Q. D. D.

III.

387. La suma de los términos *de una progresión geométrica limitada, es igual á la diferencia entre el primer término y el último término multiplicado por la razón, dividido por la diferencia que hay entre la unidad y la razón.*

Tengamos la progresión

$$\div\div a : b : c : \ldots . h : k : l$$

y representando por S la suma de los n términos de la progresión, se tendrá

$$S\,q = a + b + c + \ldots . + h + k + l \qquad (1)$$

que multiplicada por **q** nos dá

$$S = aq + bq + cq + \ldots . + hq + kq + lq$$

pero sabemos que

$$aq = b : bq = c : \ldots . hq = k \text{ y } kq = l$$

luego saldrá

$$S\,q = b + c + \ldots . + h + k + l + lq \qquad (2)$$

y restando la (2) de la (1) se obtendrá

$$S - Sq = a + (b - b) + (c - c) + \ldots. (h - h) + (k - k) + (l - l) - lq$$

luego

$$S - Sq = a - lq$$

y sacando *S* factor común.

$$S\ (1 - q) = a - lq$$

de donde

$$S = \frac{a - lq}{1 - q}$$

Q. E. L. Q. D. D.

388. Esta fórmula es para el caso de que la razón *sea menor* que **1**, es decir que la progresión sea *decreciente*.

En el caso de que la progresión fuera *creciente*, es decir, que $q > 1$, restaríamos la (1) de la (2) y tendríamos

$$S\,q - S = lq - a$$

ó bien

$$S\ (q - 1) = lq - a$$

es decir

$$S = \frac{lq - a}{q - 1}$$

Q. E. L. Q. D. D.

IV.

389. El producto de los términos *de una progresión geométrica limitada, es igual á la raiz cuadrada del producto de los extremos elevado á la potencia expresada por el número de términos de la progresión.*

Tengamos la progresión

$$\div\!\div\ a : b : c : \ldots\ldots : h : k : l$$

que suponemos está formada de n términos.

Llamando P el producto de sus términos, tendremos

$$P = a \times b \times c \times \ldots\ldots \times h \times k \times l$$

ó también invirtiendo

$$P = l \times k \times h \times \ldots\ldots \times c \times b \times a$$

y multiplicando término á término las dos igualdades, resultará

$$P \times P = (a \times l) \times (b \times k) \times (c \times h) \ldots\ldots \times (h \times c) \times (k \times b) \times (l \times a)$$

pero como

$$\begin{aligned} b \times k &= al \\ c \times h &= al \\ \ldots\ldots &= al \\ h \times c &= al \\ k \times b &= al \end{aligned}$$

pues el producto de los términos equidistantes de los extremos (385) es igual al producto de estos, resultará

$$P \times P = al \times al \times al \times \ldots\ldots \times al \times al \times al$$

pero al está repetido tantas veces como términos tiene la progresión, es decir n veces, luego se tendrá

$$P^2 = (a \times l)^n$$

y extrayendo la raíx cuadrada

$$P = \sqrt{(a \times l)^n}$$

Q. E. L. Q. D. D.

390. Interpolar un número *m* de *medios proporcionales*, entre dos números *a* y *l*, *es formar una progresión geométrica* en que *a* es el primer término, *l* el último y $m + 2$ el número de términos.

Lo único que nos falta es la *razón*, que podemos determinar por medio de la fórmula que nos dá (384) el valor del último término de una progresión geométrica, es decir

$$l = aq^{n-1}$$

En este caso

$$n = m + 2$$

luego

$$n - 1 = m + 2 - 1 = m + 1$$

y sustituyendo este valor de $n-1$, saldrá

$$l = aq^{m+1}$$

y pasando *a* al primer miembro

$$\frac{l}{a} = q^{m+1}$$

ó bien

$$q^{m+1} = \frac{l}{a}$$

y extrayendo la raíz $m + 1$, tendremos

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{l}{a}}$$

Q. E. L. Q. D. D.

EJERCICIOS

1°

Hallar el quinto término de la progresión

$$\because 4 : 10 : 25 : \ldots .$$

Aplicaríamos la fórmula (384)

$$1 = aq^{n-1}$$

y tendríamos, por ser $a = 4$; $q = 2,5$ y $n = 5$

$$1 = 4 \times 2{,}5^4$$

$$1 = \mathbf{156.25}$$

2°

Cuál será la suma de los términos de la progresión que empieza por 1, cuya razón es 2 y cuyo último término es 32.

Aplicando la fórmula (387)

$$S = \frac{lq - a}{q - 1}$$

saldrá

$$S = \frac{32 \times 2 - 1}{2 - 1}$$

ó bien

$$S = 64 - 1 = \mathbf{63}$$

3°

Cuál es el producto de los términos de la progresión.

$$\because 1 : 3 : 9 : 27 : 81$$

Aplicando la fórmula (388)

$$P = \sqrt{(a \times l)^n}$$

Siendo $a = 1$; $l = 81$ y $n = 5$

$$P = \sqrt{(1 \times 81)^5} = \sqrt{81^5}$$

ó bien

$$P = \sqrt{3486784401} = \mathbf{59049}$$

CAPÍTULO IX.

REGLA DE TRES

---

391. Se dice que dos cantidades son **directamente** *proporcionales* cuando aumentando una de ellas aumenta también la otra, y se dice que son **inversamente** *proporcionales* cuando *aumentando* una de ellas *disminuye* la otra.

Así, si se tratara de comprar *pan*, con un cierto *dinero*, el *dinero* y el *pan* serían *directamente proporcionales*, porque *aumentando el pan* se tendría que *aumentar* el dinero que se necesitaría para comprarlo y recíprocamente si *aumentamos el dinero* disponible, se *aumentaría* también el pan que se podría comprar.

Si se tratara de ver en cuanto *tiempo* se concluiría una obra, con un cierto número de *obreros*, el *tiempo y los obreros* serían *inversamente proporcionales*, pues si se empleara *más tiempo*, se necesitarían *menos obreros* y si *aumentamos* los *obreros* se *disminuiría* el *tiempo*.

392. La *Regla de tres* llamada también *Regla de Oro* ó *Regla Aurea*, es aquella mediante la cual se puede determinar el valor que tomará un número cuando se hacen variar otros números que están ligados con él, por medio de una ó varias razones, ó bien, *es la que nos enseña á resolver* los problemas que se plantean con una ó más proporciones.

393. Todo problema que se resuelve por la *regla de tres*, consta de dos partes que se llaman *Supuesto* y *Pregunta*.

El **Supuesto** se compone de cantidades conocidas y encierra constantemente una *cuestión resuelta*.

La **Pregunta** consta del mismo número de cantidades, de las cuales una es *desconocida ó incógnita*.

394. La regla de tres puede ser *Simple*, *Compuesta* y *Conjunta* ó *Múltiple*.

Simple será cuando en el problema entran *tres* cantidades *conocidas* y *una desconocida*.

Compuesta cuando contiene *más de tres* cantidades conocidas indispensables para la solución.

Conjunta cuando equivale á tantas proporciones, como razones determinadas contiene la cuestión.

395. Para facilitar la solución de una *Regla de Tres*, conviene hacer la *preparación* y el *planteo*.

La **Preparacion** consiste en escribir horizontalmente los términos del supuesto y debajo de estos, los términos de la pregunta, de manera que se correspondan las cantidades de la misma especie.

El **Planteo** consiste en la distribución de los terminos en la forma de proporción.

Regla de Tres Simple.

396. Hemos dicho que se llama regla de tres *simple* aquella que consta de *tres cantidades conocidas* y una desconocida.

Las dos cantidades homogéneas *conocidas* perteneciendo una al *supuesto* y otra á la *pregunta* se llaman **Principales** y las otras dos de las cuales una es la incógnita, se llaman **relativas**.

397. La regla de tres *simple* puede ser *directa* ó *inversa.*

Directa será cuando *suponiendo aumentada* la *principal* de la pregunta, *debe aumentarse* también *su relativa*, es decir, cuando se procede de *más* á *más* ó de *menos* á *menos.*

Inversa será cuando *aumentando la principal* de la pregunta, debe *disminuirse su relativa*, es decir, cuando se procede de *más* á *menos* ó de *menos* á *más.*

Regla de Tres Simple Directa.

Ploblema 1º

ς X *Si* 20 kg. *azúcar costaron* $ 12, *deseamos saber cuanto costarán* 30 kg. *de la misma azúcar.* X

Preparación

Sup. **20 kg.** ________________ **12 $**
Preg. **30 kg.** ________________ x **$**

Como vemos, esta es una regla de tres *Simple* porque consta de *tres términos conocidos y uno desconocido.*

Es *Directa* porque *aumentando* los kilógramos de azúcar, *deberá aumentarse* también los pesos.

Las cantidades

20 kg. ________________ 12 $

constituyen el *supuesto*, y las cantidades

30 kg. ________________ x $

constituyen la *pregunta.*

Las cantidades homogéneas

20 kg. y **30** kg. son las *principales.*

Las cantidades

12 $ y x $, son las *relativas.*

398. Para *plantear* este problema aplicaremos la siguiente regla:

La principal del supuesto es á la principal de la pregunta como la relativa del supuesto es á x.

O también:

La principal de la pregunta es á su relativa como la principal del supuesto es á x.

1er Planteo

$$\frac{20}{30} = \frac{12}{x}$$

ó también,

2º Planteo

$$\frac{20}{12} = \frac{30}{x}$$

Para hacer más mnemónica la Regla, podemos decir que para plantear una regla de tres Simple *Directa* se comparan dos á dos las cantidades de la *Preparación* tomándolas en línea *recta*, ya sea *horizontal* ó *vertical*.

399. Para resolver este problema nos bastará hallar el extremo desconocido en cualquiera de las dos proporciones.

Solución

$$x = \frac{30 \times 12}{20} = \frac{360}{20} = \frac{36}{2} = 18 \text{ \$}$$

Problema 2.º

4X *Si 10 hombres hacen 28 metros cúbicos de terraplen por día, deseo saber cuantos metros cúbicos diarios harían 15 hombres.* X

PREPARACIÓN

Sup. 10 *hombres* ———— 28 m.²
Preg. 15 » ———— x »

PLANTEO

$$\frac{10}{28} = \frac{15}{x}$$

SOLUCIÓN

$$x = \frac{28 \times 15}{10} = \frac{420}{10} = \mathbf{42} \text{ m.}^2$$

Regla de Tres Simple Inversa

400. Para *plantear* un problema de Regla de Tres Simple *Inversa*, se aplicará la siguiente regla:

La principal de la Pregunta es á la principal del Supuesto como la relativa del supuesto es x.

O también.

La principal del Supuesto es á la principal de la pregunta, como x es á la relativa de Supuesto.

PROBLEMA 1.º

5 X *Si* 355 *kilos de pan alcanzan para el consumo de* 20 *personas durante* 10 *días, deseo saber cuantos días duraría si fueran* 30 *hombres.* X

PREPARACIÓN

Sup. 20 *personas* ———— 10 *días*
Preg. 30 » ———— x »

401. Como notamos, en el enunciado del problema entra la cantidad 355 *kilos de pan* que no influye para nada en la solución del problema, puesto que hubiéramos podido decir: «Si una *cierta cantidad de pan* ...» y el problema hubiera sido el mismo.

Es necesario pues, que el calculador tenga el cuidado de no tomar en cuenta ningun dato que no sea *necesario* para que el problema sea determinado.

402. El problema anterior es de Regla de Tres *Simple* porque solo hay tres cantidades conocidas que entrarán en el planteo y es *Inversa* porque *aumentando* el número de personas, *disminuirá* el número de días.

403. Para *plantear* este problema haremos uso de la regla enunciada.

PLANTEO 1.°

$$\frac{30}{20} = \frac{10}{x}$$

PLANTEO 2.°

$$\frac{20}{30} = \frac{x}{10}$$

SOLUCIÓN

$$x = \frac{20 \times 10}{30} = \frac{200}{30} = \frac{20}{3} = \mathbf{6{,}666}\ \textit{dias}$$

PROBLEMA 2.°

Si 24 hombres tardan 16 dias en hacer una escavación, deseo saber cuantos dias tardarán 32 hombres.

PREPARACIÓN.

24 *hombres* ——— 16 *dias*
32 » x »

PLANTEO.

$$\frac{32}{24} = \frac{16}{x}$$

SOLUCIÓN

$$x = \frac{24 \times 16}{32} = \frac{384}{32} = \mathbf{12}\ \textit{días}$$

Regla de Tres Compuesta Directa.

PROBLEMA.

Si 20 albañiles trabajando 10 horas diarias pueden hacer 80 metros cúbicos de pared, se desea saber cuantos metros cúbicos podrán hacer 24 albañiles trabajando 12 horas diarias.

Preparación.

20 *albañiles*	______	10 h.	______	80 m.^{3}
24 »	______	12 »	______	x »

404. En este caso la Regla de Tres es *compuesta* porque consta de *más de tres cantidades conocidas.*

Aquí *la principal* del supuesto es

20 *albañiles* y 10 h.

La principal de la pregunta

24 *albañiles* y 12 h.

La relativa del supuesto

80 m.^{3}

y *la relativa* de la pregunta es la *incógnita.*

Vemos que *aumentando* los *albañiles* y las *horas aumentará* también el trabajo hecho, es decir los *metros cúbicos*, luego la Regla de Tres es *Directa*, y se planteará formando la *razón compuesta* por albañiles y horas, es decir que se puede *preparar* de la siguiente manera:

20 *albañiles* $\times$ 10 h.	______	80 m.^{3}
24 » $\times$ 12 »	______	x »

Planteo.

$$\frac{20 \times 10}{24 \times 12} = \frac{80}{x}$$

Solución.

$$x = \frac{24 \times 12 \times 80}{20 \times 10} = \frac{23040}{200} = \mathbf{115{,}02} \text{ m.}^3$$

405. Puede resolverse también *por medio de dos Reglas de Tres* simples, dividiendo el problema en dos partes.

Podía decirse:

«*Si* 20 h. *hacen* 80 m³., 24 h. *cuantos metros cúbicos harán*, y en seguida

«*Si trabajando 10 horas diarias hacen x' metros cúbicos, trabajando 12 horas, cuantos metros cúbicos harán.*»

Aplicando esto al mismo problema, tendríamos

Preparación.

20 h. ―――――― 80 m.³
24 » ―――――― x' »

―――

10 h. ―――――― x'
12 » ―――――― x

Planteo.

$$\frac{20}{24} = \frac{80}{x'}$$

$$\frac{10}{12} = \frac{x'}{x}$$

SOLUCIÓN

$$x' = \frac{24 \times 80}{20} = \frac{1920}{20} = 96$$

luego

$$x = \frac{12 \times x'}{10} = \frac{12 \times 96}{10} = \frac{1152}{10} = \mathbf{115,20}$$

PROBLEMA 2.º

Si 48 piezas de paño de 20 metros de largo y 1,20 de ancho me han costado 2680 $ m/n, cuanto me costarán 60 piezas del mismo paño, de 15 metros de largo y 1,60 de ancho.

Primer método.

PREPARACIÓN.

48 *piezas* —	20 m —	1.20 —	2680 $
60 » —	15 » —	1.60 —	x »

ó bien

$$\begin{array}{lc} 48 \times 20 \times 1,20 \text{ ——— } & 2680 \\ 60 \times 15 \times 1,60 \text{ ——— } & x \end{array}$$

PLANTEO.

$$\frac{48 \times 20 \times 1,20}{60 \times 15 \times 1,60} = \frac{2680}{x}$$

SOLUCIÓN.

$$x = \frac{60 \times 15 \times 1.60 \times 2680}{48 \times 20 \times 1.20} = \frac{3859200}{1152} = \mathbf{3350\ \$}$$

Segundo método.

PREPARACIÓN.

48 *piezas*	———	2680 $	
60 »	———	x''	»
20 m.	———	x''	
15 »	———	x'	
1.20 »	———	x'	
1.60 »	———	x	

PLANTEO.

$$\frac{48}{60} = \frac{2680}{x''}$$

$$\frac{20}{15} = \frac{x''}{x'}$$

$$\frac{1.20}{1.60} = \frac{x'}{x}$$

SOLUCION.

$$x'' = \frac{2680 \times 60}{48} = \frac{160800}{48} = \mathbf{3350}$$

luego

$$x' = \frac{15 \times x''}{20} = \frac{15 \times 3350}{20} = \frac{50250}{20} = \mathbf{2512,50}$$

de donde

$$x = \frac{1.60 \times x'}{1.20} = \frac{1.60 \times 2512,50}{1.20} = \frac{4020}{1.20} = \mathbf{3350\ \$}$$

Regla de Tres Compuesta Inversa.

PROBLEMA 1.º

Si 40 hombres trabajando 8 horas diarias hacen un terraplen en 25 dias, cuántos dias tardarán 60 hombres trabajando 10 horas por dia?

Primer método.

PREPARACIÓN.

40 *hombres* ——	8 h. ——	25 *dias*
60 » ——	10 » ——	x »

ó bien

$$\begin{array}{lcr} 40 \times 8 & \text{———} & 25 \\ 60 \times 10 & \text{———} & x \end{array}$$

406. Este problema es de Regla de tres *compuesta*, porque tiene *más de tres* cantidades conocidas y es *inversa*, porque *aumentando* la *principal*, hombres y horas, *disminuye* la *relativa*, días.

PLANTEO.

$$\frac{60 \times 10}{40 \times 8} = \frac{25}{x}$$

SOLUCIÓN.

$$x = \frac{40 \times 8 \times 25}{60 \times 10} = \frac{8000}{600} = \frac{80}{6} = \mathbf{13{,}333}\ \textit{dias}$$

Segundo método.

PREPARACIÓN.

40 *hombres*	———	25 *días*
60 »	———	x'
8 h.	———	x'
10 »	———	x

PLANTEO.

$$\frac{60}{40} = \frac{25}{x'}$$

$$\frac{10}{8} = \frac{x'}{x}$$

SOLUCIÓN.

$$x' = \frac{25 \times 40}{60} = \frac{1000}{60} = \frac{100}{6} = \mathbf{16,6666}$$

y por consiguiente

$$x = \frac{8 \times x'}{10} = \frac{8 \times 16,6666}{10} = \frac{133,3333}{10} = \mathbf{13,333} \text{ días}$$

PROBLEMA 2.º

Si 10 fogones, quemando carbón durante 6 horas consumen 20 toneladas de carbón en 12 días, deseo saber en cuantos días consumirá la misma cantidad de carbón, en caso de que funcionen 15 fogones durante 8 horas diarias.

Primer método.

PREPARACIÓN.

10 *fogones* ——— 6 h ——— 12 *dias*
15 » ——— 8 » ——— x »

ó bien

10×6 ——— 12
15×8 ——— x

PLANTEO.

$$\frac{15 \times 8}{10 \times 6} = \frac{12}{x}$$

SOLUCION.

$$x = \frac{10 \times 6 \times 12}{15 \times 8} = \frac{720}{120} = \mathbf{6} \textit{ dias}$$

Segundo método.

PREPARACION.

10 *fogones* ——— 12 *dias*
15 » ——— x' »

———

6 h ——— x'
8 » ——— x *dias*

PLANTEO

$$\frac{15}{10} = \frac{12}{x'}$$

$$\frac{8}{6} = \frac{x'}{x}$$

SOLUCIÓN

$$x' = \frac{10 \times 12}{15} = \frac{120}{15} = 8$$

luego

$$x = \frac{6 \times x'}{8} = \frac{6 \times 8}{8} = \frac{48}{8} = 6 \text{ } dias$$

Regla de Tres Compuesta Mixta

PROBLEMA

Si un depósito de agua que contiene 20 metros cúbicos tarda 3 dias en desagotarse funcionando 8 robinetes durante 10 horas diarias, deseo saber cuántos dias tardará en desagotarse un depósito de 40 metros cúbicos funcionando 12 robinetes iguales durante 16 horas.

PREPARACION

20 m.³ ____	8 *robinetes* ____	10 h ____	3 *dias*
40 » ____	12 » ____	16 » ____	x »

407. Esta Regla de Tres es *Compuesta*, porque consta de *más de tres* cantidades conocidas, y es *Mixta*, por que se puede *descomponer* en una regla de tres *directa* y dos reglas de tres *inversas*.

Efectivamente, si decimos: «20 *metros tardan* 3 *días*, 40 *metros cuánto tardarán?* Será *directa*, porque *aumentando* los metros, *aumentarán* los días.

Diciendo: «8 *robinetes tardan* x'' días, *cuánto tardarán* 12 *robinetes*». Será *inversa*, porque *aumentando* los robinetes, *disminuirán* los días.

Diciendo «*Trabajando los robinetes* 10 *horas, tardan* x' *días, trabajando* 16 *horas, cuánto tardarán.*» Es también *inversa*, porque *aumentando* las horas de trabajo de los robinetes, *disminuirán* los días.

Luego, se tendrá la siguiente:

PREPARACION

$$\textit{Directa}\left\{\begin{array}{lll} 20 \text{ m.}^3 & \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} & 3 \textit{ días} \\ 40 \ \text{»} & \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} & x'' \ \text{»} \end{array}\right.$$

$$\textit{Inversa}\left\{\begin{array}{lll} 8 \textit{ robinetes.} & \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} & x'' \textit{ días} \\ 12 \quad \text{»} & \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} & x' \ \text{»} \end{array}\right.$$

$$\textit{Inversa}\left\{\begin{array}{lll} 10 \text{ h.} & \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} & x' \textit{ días} \\ 16 \ \text{»} & \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} & x \ \text{»} \end{array}\right.$$

PLANTEO

$$\frac{20}{40} = \frac{3}{x''}$$

$$\frac{12}{8} = \frac{x''}{x'}$$

$$\frac{16}{10} = \frac{x'}{x}$$

SOLUCIÓN

$$x'' = \frac{40 \times 3}{20} = \frac{120}{20} = 6$$

$$x' = \frac{8 \times x''}{12} = \frac{8 \times 6}{12} = \frac{48}{12} = 4$$

$$x = \frac{10 \times x'}{16} = \frac{10 \times 4}{16} = \frac{40}{16} = \mathbf{2.50}\ \textit{días}$$

PROBLEMA 2º

Si 80 hombres, trabajando 7 horas diarias hicieron 674 metros cúbicos de pared en 8 días, se desea saber cuántos días tardarán para hacer 1000 metros cúbicos, 95 hombres, trabajando 9 horas por día.

1ª PREPARACION

80 *hombres* — 7 *horas* — 674 m³ — 8 *días*
95 » — 9 » — 1000 » — x »

2ª PREPARACIÓN

$$\textit{Inversa} \begin{cases} 80 \textit{ hombres} \text{ ———— } 8 \textit{ días} \\ 95 \quad » \text{ ———— } x'' \ » \end{cases}$$

$$\textit{Inversa} \begin{cases} 7 \textit{ horas} \text{ ———— } x'' \textit{ días} \\ 9 \quad » \text{ ———— } x' \ » \end{cases}$$

$$\textit{Directa} \begin{cases} 674 \text{ m}^3 \text{ ———— } x' \textit{ días} \\ 1000 \ » \text{ ———— } x \ » \end{cases}$$

PLANTEO

$$\frac{95}{80} = \frac{8}{x''}$$

$$\frac{9}{7} = \frac{x''}{x'}$$

$$\frac{674}{1000} = \frac{x'}{x}$$

SOLUCION

$$x'' = \frac{80 \times 8}{95} = \frac{640}{95} = \mathbf{6,7368}$$

$$x' = \frac{7 \times x''}{9} = \frac{7 \times \mathbf{6,7368}}{9} = \frac{47,1576}{9} = \mathbf{5,2397}$$

$$x = \frac{1000 \times x'}{674} = \frac{1000 \times \mathbf{5,2397}}{674} = \frac{5239,7}{674}$$

$$x = \mathbf{7,774} \text{ días}$$

Regla de Tres Conjunta *

408. La *Regla de Tres Conjunta*, equivale á tantas proporciones como razones determinadas contiene la cuestión propuesta, y entónces, podrá resolverse por medio de sucesivas proporciones *simples*, ó bien, *mediante una proporción compuesta*.

409. En la práctica se plantea el problema del siguiente modo:

1º *Se determinan las razones, tomando como primer término de comparación la incógnita, á cuya derecha se escribe la cantidad equivalente.*

2º *Debajo de la x se escribe otra cantidad homogénea á la segunda de la primera razón, y á su derecha su equivalente, y del mismo modo, se dispondrán todas las razones en dos columnas verticales, de manera que se hallen colocados unos debajo de otros tanto los primeros, como los segundos términos de cada una de las razones.*

3º *Debe tenerse la precaución, de que el primer término de cada razón sea de la misma especie que el segundo término de la razón anterior, y que el segundo término de la última razón sea de la misma especie que la incógnita.*

4º *Hecho esto, se forma el producto de los términos colocados á la derecha y el de los colocados á la izquierda.*

5º *Se divide el primer producto por el segundo, y el cociente, será el resultado buscado.*

PROBLEMA 1.º

Sabiendo que se obtienen 10 @ de azúcar por $ 49, que 20 @ de azúcar equivalen á 18 metros paño y que se compran 4 pp. de vino con 165 metros de paño, se desea saber cuantos pesos se necesitarán para comprar 30 pp. de vino de la misma calidad.

PLANTEO

$$\begin{array}{lcr} x\ \$ & \text{———} & 30 \text{ pp.} \\ 4 \text{ pp.} & \text{———} & 165 \text{ m.} \\ 18 \text{ m.} & \text{———} & 20\ @ \\ 10\ @ & \text{———} & 49\ \$ \end{array}$$

SOLUCION

$$x \times 4 \times 18 \times 10 = 30 \times 165 \times 20 \times 49$$

$$x = \frac{30 \times 165 \times 20 \times 49}{4 \times 18 \times 10} = \frac{4.851.000}{720} = \mathbf{6737{,}50\ \$}$$

410. Se puede *simplificar* muchísimo la operación, suprimiendo en ambas columnas los *factores comunes*.

Así, el planteo anterior se puede reducir dividiendo ambas *columnas* por **10, 4, 3** y **3** que son factores comunes.

REDUCCION

$$\begin{array}{lcr} x\ \$ & \text{———} & 1 \text{ pp.} \\ 1 \text{ pp.} & \text{———} & 55 \text{ m.} \\ 2 \text{ m.} & \text{———} & 5\ @ \\ 1\ @ & \text{———} & 49\ \$ \end{array}$$

SOLUCION

$$x = \frac{1 \times 55 \times 5 \times 49}{1 \times 2 \times 1} = \frac{13475}{2} = \mathbf{\$\ 6737{,}50}$$

Problema 2°

Pudiéndose permutar 35 kilógramos de arroz por 5 metros de terreno, sabiéndose que por 10 metros de terreno nos dan 60 litros de vino y que 100 litros de vino valen 58 $. deseo saber cuantos kilógramos de arroz podré comprar con 186 $.

Planteo

x kg.	———	186 $
58 $	———	100 l.
60 l.	———	10 m.
5 m.	———	35 kg.

Reduccion

x	———	31 $
29 $	———	50 l.
1 l.	———	1 m.
1 m.	———	7 kg.

Solucion

$$x = \frac{31 \times 50 \times 1 \times 7}{29 \times 1 \times 1} = 374{,}13 \text{ kg. } \textit{arroz}$$

Regla del Tanto por Ciento *

411. La regla del *tanto por ciento*, no es más que una *Regla de Tres*, y se aplica en la determinación:

1º *De la ganancia ó pérdida obtenida en la compra-venta de artículos.*

2º *Cálculo de comisiones y corretages.*

3º *Cálculo de garantías.*

4º *Fijar los gastos de trasporte de mercaderías.*

5º *Conocer el interés ó descuento de los valores á plazo.*

6º *Cotizar los fondos públicos.*

7º *Repartición de utilidades ó pérdidas, de una Sociedad Mercantil.*

8º *Fijar el dividendo de una quiebra.*

9º *Fijar el dividendo de una empresa.*

10º *Fijar las primas de seguros.*

11º *Fijar el cambio de diferentes tipos monetarios y un sin número de otras operaciones de la misma naturaleza y que iremos estudiando en seguida.*

412. *Para resolver la regla del Tanto por ciento,* se puede usar indistintamente la *regla de tres* simple y compuesta, ó la *Regla Conjunta.*

Problema 1º

Cuanto costarán 3450 naranjas, á 8 $ el ciento.

Preparacion

100 ———————— 8
3450 ———————— x

Planteo

$$\frac{100}{3450} = \frac{8}{x}$$

Solución

$$x = \frac{3450 \times 8}{100} = \frac{27600}{100} = \mathbf{276\ \$}$$

Problema 2.°

Estando el oro al 325 %, deseo saber cuanto me darán por 7480 pesos oro.

Preparación

$$\begin{array}{rcl} 100 & \underline{\hspace{4cm}} & 325 \\ 7480 & \underline{\hspace{4cm}} & x \end{array}$$

Planteo

$$\frac{100}{7480} = \frac{325}{x}$$

Solucion

$$x = \frac{7480 \times 325}{100} = \frac{2431000}{100} = \mathbf{\$\ 24310}$$

Regla de Corretaje *

413. La regla de *Corretaje,* nos enseña á *calcular la comisión ó corretaje* que se debe abonar á otra persona, por su trabajo en la gestión de algun negocio.

Problema 1.º

Qué comisión deberé pagar á un corredor, por la compra de 7400 $ oro, á razón de $1^1/_2$ %.

Preparacion

$$\begin{array}{lcl} 100 & \text{———————} & 1.50 \\ 7400 & \text{———————} & x \end{array}$$

Planteo

$$\frac{100}{7400} = \frac{1.50}{x}$$

Solucion

$$x = \frac{7400 \times 1.50}{100} = \frac{11100}{100} = 111 \ \$$$

Problema 2.º

Cuánto se deberá pagar por comisión á un rematador por la venta de una propiedad en la suma de $ 22.300, siendo la comisión convenida el 3 por mil.

PREPARACION

$$\begin{array}{lcr} 100 & \text{———————} & 3 \\ 2.300 & \text{———————} & x \end{array}$$

PLANTEO

$$\frac{1000}{22.300} = \frac{3}{x}$$

SOLUCION

$$x = \frac{22.300 \times 3}{1000} = \frac{66900}{1000} = \$\ 66{,}90$$

Regla de Garantía *

414. La *regla de garantía* es la que *nos enseña á calcular la garantía* que debemos pagar á nuestro comisionista, *cuando se hace garante del cobro* de las mercaderías vendidas por nuestra cuenta.

PROBLEMA

Qué garantía debemos pagar á nuestro consignatario de San Juan por la comisión de garantía al 2 °/o, sobre la suma de $ 7.800, importe de la venta de los artículos que le consignamos.

PREPARACION

$$\begin{array}{lcr} 100 & \text{———————} & 3\ \$ \\ 7800 & \text{———————} & x\ \text{»} \end{array}$$

PLANTEO

$$\frac{100}{7800} = \frac{3}{x}$$

SOLUCION

$$x = \frac{3 \times 7800}{100} = \frac{23400}{100} = \mathbf{234\ \$}$$

Regla de Trasporte *

415. La *regla de trasporte, nos enseña á calcular los gastos de fletes*, que deberemos abonar por una cierta mercadería que tiene un cierto peso ó espacio, *cuando se conoce la tarifa* establecida por metro cúbico ó por kilógramo.

PROBLEMA 1.º

Un comerciante desea remitir á Lujan 3865 kilógramos de mercaderías que están aforadas en las tarifas de trasporte á razón de $ 19.70 los 1000 kilos.

¿Cuánto deberá pagar?

PREPARACION

1000 kg.	————	$ 19.70
3865 »	————	x

Planteo

$$\frac{1000}{3865} = \frac{19.70}{x}$$

Solucion

$$x = \frac{3865 \times 19.70}{1000} = \frac{76140,50}{1000} = \$\ \mathbf{76,14}$$

Problema 2.°

He pagado 638,50 $ por el trasporte de 7432 kgs. de mercaderias. Deseo saber cuanto me han cobrado por cada 100 kilógramos.

Preparacion

7432 kg.	———	638,50 $
100 »	———	x

Planteo

$$\frac{7432}{100} = \frac{638,50}{x}$$

Solucion

$$x = \frac{638,50 \times 100}{7432} = \frac{63850}{7432} = \$\ \mathbf{8,59}$$

CAPÍTULO X.

REDUCCION Á LA UNIDAD *

416. El método de la *Reducción á la Unidad*, consiste en determinar el valor de la *relativa* del supuesto, en la suposición de que todas las cantidades que constituyen su *principal*, se reduzcan á la *unidad*, y de este dato, deducir el valor de la incógnita, valiéndose de las relaciones que guardan entre sí las cantidades que constituyen *la principal* de la pregunta,

417. El procedimiento que debe seguirse, lo indicaremos á medida que se vayan resolviendo varios problemas de regla de tres *Simple, Directa é Inversa: Compuesta, Directa é Inversa, y Múltiple.*

Tomaremos los mismos ejemplos, para que nos sirvan de comprobación de la exactitud de las operaciones.

PROBLEMA 1.º

Si 20 kg. de azúcar costaron $ 12, deseo saber cuanto costarán 30 kilógramos de azúcar, de la misma calidad.

PREPARACION

20 kg.	————	12 $
30 »	————	x »

Solucion

El raciocinio que emplearemos, será el siguiente: Puesto que 20 kg. de azúcar cuestan 12 $, *un kilóg. costará 20 veces menos*, es decir:

$$\frac{12}{20} \textit{ precio de un kilógramo}$$

Si *un* kilógramo vale $\frac{12}{20}$ $, *30 kilógramos costarán 30 veces más*, es decir:

$$\frac{12}{20} \times 30 = \frac{12 \times 30}{20} = \frac{360}{20} = 18 \ \$$$

resultado igual (399) al obtenido anteriormente.

Problema 2.°

Si 355 kilógramos de pan, alcanzan para el consumo de 20 personas durante 10 dias, deseo saber, cuantos dias durarian si fueran 30 individuos.

Preparacion

20 *personas*	————	10 *dias*
30 »	————	*x* »

Solucion

Si el pan alcanza 10 días para 20 personas, para *una sola* persona alcanzaría 20 *veces más*, es decir: 10×20 y para 30 personas durará 30 veces *menos*, es decir:

$$x = \frac{10 \times 20}{30} = \frac{200}{30} = 6{,}666 \textit{ dias}$$

PROBLEMA 3.º

Si 20 albañiles trabajando 10 horas diarias pueden hacer 80 metros cúbicos de pared, se desea saber cuantos metros cúbicos podrán hacer 24 albañiles, trabajando 12 horas diarias.

PREPARACION

20 *albañiles*	————	10 *horas*	————	80 m.
24 »	————	12 »	————	x »

SOLUCION

Puesto que 20 albañiles hacen 80 m³, *1 albañil* hará $\frac{80}{20}$

24 albañiles harán $\frac{80}{20} \times 24 = \frac{80 \times 24}{20}$

Si trabajando 10 horas hacen 24 hombres $\frac{80 \times 24}{20}$

en una hora harán $\frac{80 \times 24}{20} : 10 = \frac{80 \times 24}{20 \times 10}$

---

y en 12 horas $\frac{80 \times 24}{20 \times 10} \times 12$,

es decir:

$$x = \frac{80 \times 24 \times 12}{20 \times 10} = \frac{23040}{200} = 115{,}20 \text{ m}^3$$

PROBLEMA 4°.

Si 40 hombres trabajando 8 horas diarias hacen un terraplén, en 25 días, cuántos días tardarán 60 hombres trabajando 10 horas diarias?

PREPARACIÓN.

40 *hombres* ———	8 *horas* ———	25 *días*
60 » ———	10 » ———	x »

SOLUCION

Puesto que 40 hombres tardan 25 días, *un hombre* tardará $25 \times \mathbf{40}$ días, y 60 *hombres*, tardarán $\dfrac{25 \times 40}{\mathbf{60}}$ *días*.

Si trabajando 8 horas diarias, tardan $\dfrac{25 \times 40}{\mathbf{60}}$ trabajando *una hora*, tardarán $\dfrac{25 \times 40 \times \mathbf{8}}{60}$ y trabajando 10 horas diarias tardarán $\dfrac{25 \times 40 \times 8}{60} : \mathbf{10}$ es decir:

$$x = \frac{25 \times 40 \times 8}{60 \times 10} = \frac{8000}{600} = \mathbf{13.333} \textit{ días}$$

PROBLEMA 5.°

Si un depósito de agua que contiene 20 metros cúbicos, tarda 3 días en desagotarse, funcionando 8 robinetes durante 10 horas, deseo saber cuántos días tardará en desagotarse un depósito de 40 metros cúbicos funcionando 12 robinetes iguales durante 16 horas.

PREPARACIÓN

$20\ m^3$ — 8 *robinetes* — 10 *horas* — 3 *días*
40 » — 12 » — 16 » — x

SOLUCION

Puesto que para 20 m^3 tardan 3 días, *para un metro* cúbico, tardará $\frac{3}{20}$

y para **40** metros cúbicos tardarán $\frac{3}{20} \times 40 = \frac{3 \times 40}{20}$

Puesto que 40 metros cúbicos, funcionando **8** *robinetes* tardan $\frac{3 \times 40}{20}$

Si funcionara *un robinete* tardaría $\frac{3 \times 40 \times 8}{20}$

Luego, **12** *robinetes* tardarán $\frac{3 \times 40 \times 8}{20 \times 12}$

Puesto que 12 robinetes, trabajando **10** horas tardan $\frac{3 \times 40 \times 8}{20 \times 12}$

Trabajando *una* hora, tardaría $\frac{3 \times 40 \times 8 \times 10}{20 \times 12}$

y trabajando **16** *horas* tardará $\frac{3 \times 40 \times 8 \times 10}{20 \times 12 \times 16}$

es decir

$$x = \frac{3 \times 40 \times 8 \times 10}{20 \times 12 \times 16} = \mathbf{2.50}\ \textit{días}$$

418. Del mismo modo, podríamos proseguir con los demás problemas resueltos anteriormente por medio de las proporciones.

419. Este Método, aunque se presenta revestido de la mayor sencillez, requiere en su aplicación una fuerza de raciocinio frecuentemente superior al grado de inteligencia de la juventud que en él debe iniciarse, por cuyo motivo creemos que debe preferirse el método de las proporciones que es de más fácil planteo y más fácil comprobación.

CAPÍTULO XII.

REGLA DE INTERES

420. Se llama **Regla de Interés**, la *que nos enseña á resolver todas las cuestiones á que puede dar lugar la colocación de capitales á premio.*

421. En toda cuestión de regla de interés, *entran cuatro elementos ó datos* principales, que son:

Capital, que es el dinero que se coloca á premio.

Tiempo, que es el tiempo durante el cuál se considera impuesto el capital.

Razón, que es la *tasa ó tanto por ciento* que debe pagarse por cada 100 unidades de dinero y que se escribe, poniendo primeramente el número y después el símbolo °/₀.

Interés, que es la *renta* que produce ese capital colocado á un tanto por ciento y durante cierto tiempo.

Finalmente, interviene la cantidad 100 que es una *cantidad auxiliar*.

422. Las fórmulas usadas para *determinar el interés* son las siguientes:

$$I = \frac{C \times T \times R}{100}$$

$$C = \frac{I \times 100}{T \times R}$$

$$T = \frac{I \times 100}{C \times R}$$

$$R = \frac{I \times 100}{C \times T}$$

Donde I, representa el *interés;* C, el *capital;* T, el *tiempo* y R, la *razon*.

423. La primer fórmula nos dice que:

El interés *es igual al capital multiplicado por el tiempo y por la razón y dividido el producto por 100.*

El capital *es igual* **al producto del interés por 100** *y dividido por el producto de la razón y el tiempo.*

La **razón** *es igual* **al interés multiplicado por 100** *y dividido por el producto del capital y el tiempo.*

El **tiempo** *es gual* **al producto del interés por 100** *y dividido por el capital y razón.*

424. Estas reglas se pueden reducir á dos:

1ª *Para hallar el interés, se multiplican los tres datos conocidos y se divide por 100.*

2ª *Para hallar cualquiera de los otros datos, se multiplica siempre el interés por 100 y se divide por el producto de los otros datos.*

425. Es necesario tener presente que *siempre de-*

be usarse el tiempo reducido á la unidad determinada por la razón y expresado en número ó fracciones decimales.

PROBLEMA 1.º

Qué **interés** *producirá un capital de 7300 $, colocado al 5 % anual, durante 4 años.*

FORMULA

$$I = \frac{C \times T \times R}{100}$$

SOLUCION

$$I = \frac{7300 \times 4 \times 5}{100} = \frac{146000}{100} = \mathbf{1460\ \$} \text{ — } \textit{Interés}$$

PROBLEMA 2.º

Qué **capital** *me dará un interés de 2000 $, colacándolo durante 3 años al 8 %.*

FORMULA

$$C = \frac{I \times 100}{T \times R}$$

SOLUCION

$$C = \frac{2000 \times 100}{3 \times 8} = \frac{200{,}000}{24} = \mathbf{8333{,}33\ \$} \text{ — } \textit{Capital}$$

PROBLEMA 3.º

Durante cuanto **tiempo** *deberé tener colocado un capital ae 6500 $ para que, colocado al 6 °/o me produzca 1950 $ de interés.*

FÓRMULA

$$T = \frac{I \times 100}{C \times R}$$

SOLUCION

$$T = \frac{1950 \times 100}{6500 \times 6} = \frac{195.000}{39000} = \mathbf{5} \textit{ años—Tiempo}$$

PROBLEMA 4.º

A **razón** *de cuánto por ciento se debe colocar 8000 $ para que en 5 años me produzcan 3600 $ de interés.*

FORMULA

$$R = \frac{I \times 100}{C \times T}$$

SOLUCION

$$R = \frac{3600 \times 100}{8000 \times 5} = \frac{360.000}{40000} = 9\ {}^{o}/_{o} \textit{—Razón}$$

426. Estos casos son los más sencillos que se pueden presentar, pues el tiempo ya está dado, *reducido* *á la unidad determinada por la razón*, puesto que *la razón era anual* y el tiempo *años*.

Se ha convenido en suponer, que *toda razón mayor que el* **dos** por ciento, representa *tanto por ciento anual*, siempre que no se especifique lo contrario.

PROBLEMA 5°

¿Qué **interés** *producirán 3000 $ colocados al 2 °/₀ durante 4 años?*

FÓRMULA

$$I = \frac{C \times T \times R}{100}$$

SOLUCION

$$I = \frac{3000 \times 48 \times 2}{100} = \frac{288000}{100} = \mathbf{2880\ \$} - \textit{Interés}$$

427. Como notamos, en este caso el *tanto por ciento es mensual* y el tiempo es **4** *años*, por cuyo motivo hemos reducido el tiempo á la *unidad determinada por la razón*, es decir *meses*, para lo cual nos bastó multiplicar 4 por 12 y nos dió **48** *meses*, que es el factor que hemos introducido en la fórmula.

PROBLEMA 6.°

¿Cuál será el **capital** *que deberemos colocar al 6 °/₀ durante 4 años, 6 meses y tres días para que nos produzca 1500 $ de interés?*

FORMULA

$$C = \frac{I \times 100}{T \times R}$$

SOLUCION

$$C = \frac{1500 \times 100}{4,508 \times 6} = \frac{150000}{27.048} = \$\ 5545,69 - \textit{Capital}$$

428. En este caso, también hemos reducido el tiempo á la unidad conveniente, para lo cual hemos multiplicado 6 meses por 30 *días* (*mes comercial*) y agregado los **3** *días* indicados en el problema, y en seguida, hemos dividido los 183 *días* por 360 *(año comercial)*, sacando así la fracción **0,508**, que la agregamos á los *cuatro años* del problema propuesto. Es decir, hemos hecho una reducción de un número complejo á número decimal (307).

PROBLEMA 7.°

Habiendo colocado 50.000 $ á interés, durante 6 meses y 12 días, se me entregaron 2500 $ de intereses. Deseo saber á **cuanto por ciento anual** *estaba colocado el capital propuesto.*

FORMULA

$$R = \frac{I \times 100}{C \times T}$$

SOLUCION

$$R = \frac{2500 \times 100}{50.000 \times \mathbf{0.533}} = \frac{250.000}{26650} = \mathbf{9.38}\ \%_0 - \textit{Razón}$$

429. Siendo la razón buscada *anual*, hemos tenido que formar la *fracción de año* **0,533**, que representa los 6 meses y 12 días del problema propuesto.

PROBLEMA 8.º

¿Durante qué **tiempo** *deberé tener colocado un capital de 10.000 $ al 10 %, para que me produzca 1800 $ de interés?*

FORMULA

$$T = \frac{I \times 100}{C \times R}$$

SOLUCION

$$T = \frac{1800 \times 100}{10.000 \times 10} = \frac{180.000}{100.000} = \mathbf{1{,}80} \text{ años} - \textit{Tiempo}$$

que reducido á complejo será

$$T = \mathbf{1}\ \textit{año}\ \mathbf{9}\ \text{m.}\ \mathbf{18}\ \textit{días}.$$

430. En la resolución de estos problemas, *suele adoptarse el día como unidad de tiempo*, para calcular los intereses, en cuyo caso *se reduce la razón á diaria*, lo cual se consigue *dividiendo la razón* por **360** *si es anual* ó por **30** *si la razón es mensual*.

PROBLEMA 9.°

¿**Cuánto producirán** *3000 $ colocados al 7 °/. durante 2 años, 3 meses y 7 dias?*

FORMULA

$$I = \frac{C \times T \times R}{100}$$

SOLUCION

$$I = \frac{3000 \times \mathbf{817} \times 7}{100 \times \mathbf{360}} = \frac{3000 \times 817 \times 7}{36.000}$$

$$= \frac{17.157.000}{\mathbf{36000}} = \mathbf{476{,}58\ \$}\ ^{m}/_{n}$$

PROBLEMA 10.°

¿Cuál es el **interés** *que me producirá 8000* **$** *colocados al 1 ³/₄ por ciento durante 1 año, 8 meses y 23 dias?*

FORMULA

$$I = \frac{C \times T \times R}{100}$$

SOLUCION

$$I = \frac{8000 \times \mathbf{623} \times 1.75}{100 \times \mathbf{30}} = \frac{8.722.000}{\mathbf{3000}} = \mathbf{2907{,}33\ \$}$$

431. Suele emplearse también, para *calcular el interés*, números determinados, llamados **divisores fijos;** en cuyo caso, la solución se reduce á *multiplicar el capital por los días, dividiendo el producto por el divisor fijo correspondiente á la razón.*

TABLA DE DIVISORES FIJOS

Para el año comercial de 360 días

RAZÓN	DIVISOR FIJO		RAZÓN	DIVISOR FIJO	
	Mensual	Anual		Mensual	Anual
1/5	15.000	180.000	5	600,00	7.200,00
1/4	12.000	144.000	5 1/2	545,45	6.545,40
1/3	9.000	108.000	6	500,00	6.000,00
1/2	6.000	72.000	6 1/2	461,53	5.538,36
2/5	7.500	90.000	7	428,57	5.142,84
2/3	4.500	54.000	7 1/2	400,00	4.800,00
3/5	5.000	60.000	8	375,00	4.500,00
3/4	4.000	48.000	8 1/2	352,94	4.235,28
4/5	3.750	45.000	9	333,33	4.000,00
1	3.000	36.000	10	300,00	3.600,00
1 1/4	2.400	28.800	11	272,72	3.272,64
1 1/3	2.250	27.000	12	250,00	3.000,00
1 1/2	2.000	24.000	13	230,76	2.769,12
1 3/4	1.714,28	20.571,36	14	214,28	2.571,36
2	1.500	18.000	15	200,00	2.400,00
2 1/2	1.200	14.400	16	187,50	2.250,00
3	1.000	12.000	17	176,47	2.017,64
3 1/2	857,14	10.285,68	18	166,66	2.000,00
4	750	9.000	19	157,89	1.894,68
4 1/2	666,66	8.000	20	150,00	1.800,00

PROBLEMA 11°

Qué **interés** *me producirán 4000 $ colocados al 8 °/o anual, durante 2 años, 3 meses, 5 días?*

FORMULA

$$I = \frac{C \times T \ \textit{reducido á días}}{D = \textit{divisor fijo}}$$

SOLUCION

$$I = \frac{4000 \times 815}{\mathbf{4500}} = \frac{3260000}{4500} = \mathbf{724,44\ \$}$$

PROBLEMA 12°

Cuál es el **interés** *que producirán 7000 al 2 ½ °/o* **mensual,** *durante 1 año, 5 meses y 18 días?*

FORMULA

$$I = \frac{C \times T \ \textit{reducido á días}}{D = \textit{Divisor fijo}}$$

SOLUCION

$$I = \frac{7000 \times 528}{\mathbf{1200}} = \frac{3696000}{1200} = \mathbf{3080\ \$}$$

Interés Compuesto

432. Se llama *interés compuesto*, el que proviene del capital *aumentado con los intereses devengados y agregados á él* en épocas determinadas, que se designan con el nombre de *períodos de capitalización.*

433. Las cuestiones de *interés* compuesto se pueden resolver de dos modos:

1.º *Por medio de tantas reglas de interés simple como períodos de capitalización hay*, teniendo la advertencia de que en cada periodo, *el capital debe ser aumentado con los intereses* vencidos en la época anterior, y *la suma* de los intereses devengados en los diferentes períodos, constituirá el *interés compuesto.*

Problema 1.º

¿Cuál es el **interés compuesto** *que producirán 2800 $ durante 3 años, á razón del 8 %, capitalizando los intereses anualmente?*

Solución.

$$I' = \frac{2800 \times 1 \times 8\ \%}{100} = \frac{2800 \times 8}{100} = \frac{22400}{100} = \$\ 224 \quad \text{Interés del 1er. periodo}$$

$$I'' = \frac{(2800 + 224) \times 8}{100} = \frac{3024 \times 8}{100} = \frac{24192}{100} = \$\ 241{,}92 \quad \text{Interés del 2do. periodo}$$

$$I''' = \frac{(3024 + 241{,}92) \times 8}{100} = \frac{3265{,}92 \times 8}{100} = \frac{26127{,}63}{100} = \$\ 261{,}27 \quad \text{Interés del 3er. periodo}$$

$$727{,}19 \quad \text{Interés compuesto}$$

2.° *Estableciendo una conjunta*, de modo que la primera razón conste de la incógnita y del capital primitivo y después *tantas razones como periodos de capitalización hay* y formadas por el número *cien* á la izquierda y *cien aumentado con el interés* correspondiente á ese período, á la derecha.

El resultado obtenido, será el *capital primitivo aumentado con el interés compuesto*, por cuyo motivo nos bastará restarle el capital y tendremos el interés compuesto.

Tomemos el mismo

PROBLEMA 2.°

¿Cuál es el **interés compuesto** *que producirán 2800 $, durante 3 años, á razón del 8 %, capitalizando los intereses anualmente?*

PLANTEO.

x	2800
100	108
100	108
100	108

SIMPLIFICACION.

x	2800
1	1,08
1	1,08
1	1,08

SOLUCIÓN.

$$x = \frac{2800 \times 1{,}08 \times 1{,}08 \times 1{,}08}{1 \times 1 \times 1} = 3527{,}19 \text{ Cap. más inter.}$$

$$\begin{array}{r l} -\ 2800{,}00 & \text{Cap. primitivo.} \\ \hline \mathbf{727{,}19} & \text{Interés comp.} \end{array}$$

434. De aquí sacamos

$$x = 2800 \times 1{,}08^3$$

fórmula que nos dice, que para *hallar el capital aumentado con los intereses compuestos*, se debe multiplicar dicho capital por la *unidad* aumentada con el interés por *ella devengado en un período;* elevada á una *potencia igual al número de períodos* de capitalización.

435. Como sucede muy ha menudo, que el tiempo no encierra un número exacto de períodos de capitalización, damos á continuación varios ejemplos, con los diferentes casos que se pueden presentar.

PROBLEMA 3.º

¿Qué **interés compuesto** *producirán $ 5000 impuestos al 12 °/o durante 2 años, capitalizando los intereses cada seis meses?*

Primer Método.

PREPARACIÓN.

$$I' = \frac{5000 \times 6}{100} = \frac{30000}{100} = \$\ 300 \quad \textit{Int. del 1}^{er}\textit{ periodo}$$

$$I'' = \frac{5300 \times 6}{100} = \frac{31800}{100} = \text{»}\ 318 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad 2^{o} \quad \text{»}$$

$$I''' = \frac{5618 \times 6}{100} = \frac{33708}{100} = \text{»}\ 337{,}08 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad 3^{er} \quad \text{»}$$

$$I = \frac{5955{,}08 \times 6}{100} = \frac{35730{,}48}{100} = \frac{357{,}30}{\$\ 1312{,}38} \quad \textit{Interés comp.}^{to}$$

Segundo Método.

PLANTEO.

$$\begin{array}{lcr} x & \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} & 5000 \\ 1{,}00 & \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} & 1{,}06 \\ 1{,}00 & \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} & 1{,}06 \\ 1{,}00 & \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} & 1{,}06 \\ 1{,}00 & \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} & 1{,}06 \end{array}$$

SOLUCIÓN.

$$x = \frac{5000 \times 1{,}06 \times 1{,}06 \times 1{,}06 \times 1{,}06}{1 \times 1 \times 1 \times 1}$$

$$x = \frac{5000 \times 1{,}26247696}{1} = \frac{6312{,}3848}{1} = \begin{array}{rl} 6312{,}38 & \textit{Cap. más inter.} \\ -5000{,}00 & \textit{Capital primit.} \\ \hline 1312{,}38 & \textit{Int. compuesto.} \end{array}$$

Aplicacion de la formula general

$$x = 5000 \times 1{,}06^4$$

$$x = 5000 \times 1{,}26247696 = 6312{,}38 \textit{ Capital más interes}$$
$$- 5000{,}00 \textit{ Capital primitivo}$$
$$\mathbf{1312{,}38} \textit{ Intereses compuestos}$$

En los casos siguientes, prescindiremos del 1er y 3er *Método.*

Problema 4.°

¿En cuanto se convertirán *4000 $ colocados al 8 % durante 3 años y 6 meses, capitalizando los intereses anualmente?*

Planteo

x	4000
1,00	1,08
1,00	1,08
1,00	1,08
1,00	**1,04**

Solucion

$$x = \frac{4000 \times 1{,}08 \times 1{,}08 \times 1{,}08 \times 1{,}04}{1 \times 1 \times 1 \times 1}$$

$$x = \frac{4000 \times 1{,}31}{1} = \mathbf{5240\ \$} \textit{ Capital más intereses compuestos.}$$

Problema 5.º

¿Cuál es el **interés compuesto** *que me producirán 3000 $ al 10 %, durante 9 meses, capitalizándolos semestralmente?*

Planteo

x	———	3000
100	———	105
100	———	**102,50**

Reduccion

x	———	3000
1	———	1,05
1	———	1,025

Solucion

$$x = \frac{3000 \times 1{,}05 \times 1{,}025}{1}$$

$$= 3000 \times 1{,}07625 = \mathbf{3228{,}75}$$

Problema 6.º

Qué **interés compuesto** *me producirán 6000 $, al 8 %, durante 8 meses y 9 días, siendo el período de capitalización trimestral?*

PLANTEO

x	———	6000
100	———	102
100	———	102
100	———	101,53

REDUCCION

x	———	6000
1	———	1,02
1	———	1,02
1	———	1,0153

SOLUCION

$$x = \frac{6000 \times 1{,}02 \times 1{,}02 \times 1{,}0153}{1 \times 1 \times 1 \times 1}$$

$$x = \frac{6000 \times 1{,}05631812}{1} = 6337{,}90 \text{ Capital más intereses}$$

$$\begin{array}{rl} -\,6000{,}00 & \textit{Capital primitivo} \\ \hline \mathbf{337{,}90} & \textit{Interés compuesto} \end{array}$$

CAPÍTULO XIII.

REGLA DE DESCUENTO

436. Llámase *Regla de Descuento*, la que enseña á determinar *el premio que se ha de retener* sobre una cantidad *abonada con anticipación*.

437. Varios son los documentos usados en el comercio, con los cuales se puede hacer la operación del descuento, siendo los principales los *conformes*, *pagarés y letras de cambio*.

438. El *conforme*, es un documento que entrega un comerciante á otro, *en pago* de ciertos artículos que ha comprado á plazo, generalmente de 90 á 180 días.

439. El *pagaré*, es una *promesa escrita* por la cual una persona se obliga á pagar *por sí misma*, una suma determinada de dinero.

440. La *letra de cambio*, es una *órden escrita* por la cual *una persona encarga á otra*, el pago de una suma de dinero.

La persona que dá la *órden* se llama *librador* ó *girador*, el que recibe la órden en pago, se llama *tenedor* ó *portador* y la persona que deberá abonarla, se llama *aceptante*, *librado* ó *pagador*, el cual *no está obligado* al pago, sino despues de la *aceptación*, debiendo entenderse que si el *librado no acepta* la letra, el *librador* deberá abonarla.

441. Todos los *conformes*, *pagarés* y *letras*, para que se reputen *documentos comerciales*, es necesario que estén concebidos *á la órden*, en cuyo caso el documento puede ser *endosable*, llamándose *endoso* el acto de *trasmitir* la propiedad del documento á otra persona.

442. Vemos que en esta clase de documentos existen *dos valores*, uno es el *valor nominal*, es decir, el valor que tiene escrito pero que solo lo tendrá despues de *un cierto plazo*, y el otro el *valor real* ó sea el valor *actual*.

La diferencia entre el valor *real* y el valor *nominal*, es lo que se llama **Descuento**.

443. Para precisar las ideas, supongamos tener el presente documento:

A los noventa días de la fecha pagaré al señor Oscar Suarez ó á su órden la cantidad de dos mil trescientos pesos moneda nacional ($ 2300,00) de curso legal, por igual valor recibido.

Buenos Aires, Mayo 8 de 1894.

Roberto Wernicke.

Por mí, páguese al Sr. Cárlos M. Percovich.

Oscar Suarez.

Por mí, páguese al Sr. Vicente Almonacid.

Cárlos M. Percovich.

En este caso Roberto Wernicke es el *girador y aceptante;* Oscar Suarez es el *portador* y *endosante;* Percovich es segundo *endosante* y Vicente Almonacid es el *tenedor*, el cuál, segun nuestro código, en caso de no pagar Wernicke, podrá ejecutar á Percovich y Suarez.

444. Suponiendo que estamos hoy á 25 de Mayo, faltarán aún *sesenta y ocho* días para que venza ese pagaré, cuyo *valor nominal* es de $ 2.300, y la cantidad de dinero que entregó Almonacid para ese documento es el *valor real*, siendo la diferencia de esos dos valores el *descuento*.

445. Al *descontarse* un documento de esa naturaleza, no se hace más que calcular qué cantidad de dinero *(valor real)* deberá entregar *hoy* para que al *tanto por ciento* se convierta al cabo de *tantos días*, en una cierta suma de dinero *(valor nominal)*.

446. Luego, vemos que la aplicación de la *Regla de Descuento* no es más que la aplicación de la *Regla de Interés*, es decir, que el *descuento* será *el interés que producirá el valor real*.

En la práctica no se hace así, sino que se determina el *interés del valor nominal*.

Este es el *descuento comercial* y el primero es el *descuento racional* ó *matemático*.

Problema

Cuál es la cantidad que debe retenerse efectuando con 3 meses de anticipación, el pago de una obligación de $ 2400, mediante $1\frac{1}{4}$ °/o mensual de premio, por pago adelantado.

Formula

$$D = \frac{C \times T \times R}{100}$$

SOLUCION

$$D = \frac{2400 \times 3 \times 1,25}{100} = \frac{9000}{100} = \mathbf{90\ \$}$$ *Descuento Comercial.*

Es decir que deberá abonarse

$$2400 - 90 = \mathbf{2310\ \$}$$ *Valor Real*

447. Si esta operación estuviera bien hecha, *hallando el interés que me producirían 2310 $ al 1 $^1/_4$ %, durante 3 meses, y agregándole el valor real debería reproducirse* el valor *nominal*, es decir 2.500 $, cosa que no sucede, pues

$$I = \frac{2310 \times 3 \times 1.25}{100} = \frac{8662,50}{100} = \mathbf{86,62\ \$}$$

de donde

$$2310 + 86,62 = 2396,62\ \$$$

que como vemos nos dá una diferencia de

$ 3.38

contraria al acreedor, es decir *al que recibe* el dinero.

448. Damos á continuación, un ejemplo de las *cuatro cuestiones* que nos puede presentar la Regla de *Descuento Comercial.*

PROBLEMA 1.°

Cuál es el **descuento** *que deberemos hacer en una letra de 4000 $ que se vence dentro de 60 días, al 8 % anual.*

FORMULA

$$D = \frac{C \times T \times R}{100}$$

SOLUCION

$$D = \frac{4000 \times \mathbf{0{,}1666} \times 8}{100} = \frac{5333}{100} = \$\ \mathbf{53{,}33}$$

PROBLEMA 2.º

Cuál es el **tanto por ciento** *de descuento que me han cobrado, al descontarme una letra de 4000 $ que se vence dentro de 60 dias, si me han entregado un saldo de $ 3946,666.*

En este caso el descuento hecho fué

$$4000 - 3946{,}666 = \mathbf{53{,}33}$$

FORMULA

$$R = \frac{D \times 100}{C \times T}$$

SOLUCION

$$R = \frac{53{,}33 \times 100}{4000 \times 0{,}1666} = \frac{5333}{665{,}66} = 8\ \%$$

PROBLEMA 3.º

Cuánto **tiempo** *faltaba para vencerse una letra de 4000 que á razón del 8 %, me hicieron un descuento de $ 53,33.*

FORMULA.

$$T = \frac{D \times 100}{C \times R}$$

SOLUCION.

$$T = \frac{53,33 \times 100}{4000 \times 8} = \frac{5333}{32000} = \mathbf{0,166} = \mathbf{60}\ \textit{dias}$$

PROBLEMA 4.°

Cuál era el **capital nominal** *de una letra que faltando 60 dias para vencerse y á razón del 8 °/₀, se me entregó $ 3946,66.*

En este caso para determinar el valor nominal, tendríamos que ver en *qué cantidad se transformarán* 3946,66 $ colocados al interés del 8 °/₀ durante 60 días.

FORMULA.

$$I = \frac{C \times T \times R}{100}$$

SOLUCION

$$I = \frac{3946,66 \times 0,166 \times 8}{100} = \frac{5260,90}{100} = 52,60$$

Es decir, *el capital nominal* será

$$3946,66 + 52,60 = \mathbf{3999,26}$$

449. Para aplicar el **Descuento Matemático**, plantearemos las diversas cuestiones, aplicando la conjunta.

PROBLEMA 1.°

Cuál es el **valor real** *de un vale de 2490 \$, pagaderos á 3 meses y descontado á razón de 1 ¼ %.*

Aplicando *el principio del descuento matemático,* vemos que \$ 101,25 *en un mes* se convierten en \$ 100 y que *en tres meses,* \$ 100 + (1.25 × 3) = 103,75 se convertirán en 100, luego, aplicando la conjunta diríamos *en cuánto se convertirán 2490 \$ si \$ 103,75 se convierten en 100 \$.*

PLANTEO.

$$\begin{array}{rcl} x & \underline{\qquad} & 2490 \\ 103,75 & \underline{\qquad} & 100 \end{array}$$

SOLUCIÓN.

$$x = \frac{2490 \times 100}{103,75} = \frac{249.000}{103,75} = \mathbf{2400} \text{ \$ } \textit{Valor real}$$

Si calculáramos en cuanto se convertirían 2400 en tres meses al 1 ¼ % mensual, veríamos que se reproducirían el *valor nominal* 2490 \$.

PROBLEMA 2.°

Cuál era el **valor nominal** *de una letra pagadera á 3 meses y satisfecha con 2400 \$, mediante el descuento de 1 ¼ %.*

PLANTEO.

$$\begin{array}{ccc} x & \text{——} & 2400 \\ 100 & \text{——} & 103.75 \end{array}$$

SOLUCION.

$$x = \frac{2400 \times 103.75}{100} = \frac{249000}{100} = \mathbf{2490\ \$} \text{ Valor nominal.}$$

PROBLEMA 3.°

Determínese el **tiempo** *que faltaba para el vencimiento del plazo de un pagaré de 2490 \$ satisfecho con la cantidad de 2400 mediante el descuento de 1 ¼ % mensual.*

PLANTEO.

$$\begin{array}{lccc} \textit{Razón compuesta } x \times & 2400 & \text{——} & 90 \\ & 1.25 & \text{——} & 100 \end{array}$$

SOLUCIÓN.

$$x = \frac{90 \times 100}{2400 \times 1{,}25} = \frac{9000}{3000} = 3 \textit{ meses—Tiempo}$$

PROBLEMA 4.°

Se desea saber á razón de **cuanto por ciento** *fué descontada mediante la cantidad de 2400 \$, una obligación de 2490 \$ pagadera á 3 meses.*

PLANTEO.

	x _____ _____	100
Razón compuesta	2400 × 3 _____	90

SOLUCION.

$$x = \frac{100 \times 90}{2400 \times 3} = \frac{9000}{7200} = \mathbf{1{,}25} \text{ Razón}$$

Descuento Compuesto *

450. El *Descuento compuesto,* es aquel que se deduce de una cantidad pagadera al cabo de cierto tiempo, y que *equivale al interés compuesto* que devengaría, durante ese período, *el valor real.*

En la práctica, pocas veces se presenta este caso, pues, casi se puede considerar como una operación usuraria.

451. Estas operaciones, se resuelven lo mismo que las de Regla de Interés compuesto, por medio de la *Regla Conjunta.*

PROBLEMA 1.°

Con qué **cantidad** *se puede satisfacer una obligación de 3993 $ pagadera á 3 años, deduciendo de ella el interés compuesto del 10 °/₀ anual?*

PLANTEO

x	$ 3993
110	100
110	100
110	100

REDUCCION

x	3993
1,10	1
1,10	1
1,10	1

SOLUCION

$$x = \frac{3.993 \times 1 \times 1 \times 1}{1,10 \times 1,10 \times 1,10} = \frac{3993}{1,10^3} = \frac{3993}{1,331} = \mathbf{3000\ \$}$$

PROBLEMA 2.°

Qué **cantidad** *se debe entregar para descontar á razón de 10 °/o una letra de 2795,10 pagadero á 3 años y medio, deduciendo de su valor escrito el interés compuesto, capitalizado anualmente?*

PLANTEO

x	2795,10
110	100
110	100
110	100
105	100

Reduccion

x	————	2795,10
1,10	————	1
1,10	————	1
1,10	————	1
1,05	————	1

Solucion

$$x = \frac{2795,10 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1}{1,10 \times 1,10 \times 1,10 \times 1,05} = \frac{2795,10}{1,10^3 \times 1,05}$$

$$= \frac{2795,10}{1,39775} = \mathbf{2000\ \$}$$

CAPÍTULO XIV.

FONDOS PÚBLICOS

452. Se llaman *fondos públicos,* los títulos que el Gobierno de un Estado, entrega en cambio de dinero, ya sea para *pagar deudas* cuando las rentas son insuficientes, ó ya sea para *contratar empréstitos* que son urgentemente requeridos por el país, para llevar á cabo alguna obra de pública utilidad, ó bien para tener recursos para restablecer el órden interior ó repeler alguna invasión extrangera.

453. En esos títulos se establece si son *perpétuos ó* *amortizables, cuánto por ciento* ganan de interés y cual será la forma de *amortización.*

Se llaman *fondos públicos perpétuos, deuda perpétua ó renta perpétua* aquellas en que el Gobierno solo se compromete á pagar el *interés*, sin que los tenedores de esa deuda tengan *nunca* derecho á exigir la *devolución del capital*.

Deuda amortizable, es aquella que además del fondo necesario para el servicio de intereses, se dispone de una cierta cantidad para efectuar la *amortización* paulatina de la deuda.

454. La amortización puede hacerse *por sorteo ó por licitación.*

En el *primer caso*, los tenedores de los números sorteados recibirán el valor escrito en los títulos, y en el *segundo caso*, el Gobierno elige aquella ó aquellas propuestas que ceden mayor cantidad de títulos en cambio de menor cantidad de dinero.

455. El *valor efectivo ó real* de esos títulos, *no es siempre* igual á su *valor nominal ó escrito*, relación de valores que depende de muchos factores.

Como esos títulos son generalmente *al portador*, se *compran y venden* como si fueran mercaderías, y el mercado en que esto se realiza, es la *Bolsa de Comercio.*

El precio de *compra-venta*, es lo que se llama *cotización.* Así si decimos que los títulos de *Empréstito Interno están al 85 °/₀*, queremos decir que por cada título de 100 pesos *(Valor nominal)* nos darán 85 pesos en efectivo *(Valor real)*, diríamos entonces, que los títulos del Empréstito Interno *están cotizados al 85 °/₀*.

456. Hemos dicho que el *valor efectivo* de los fondos públicos, varía con la variación de ciertas circunstancias.

Así, por ejemplo, si se teme que el Gobierno del Estado no dé perfecta aplicación de las rentas que obtiene, si se teme alguna conmoción interior, si se cree que puedan sobrevenir conflictos con alguna potencia extrangera, si se espera que la futura cosecha será mala, entónces *los fondos públicos bajan*, pues se vé venir una crísis comercial y con ella una crísis financiera que tal vez obligue al Gobierno á *suspender el servicio* de la deuda.

En cambio, si el pueblo tiene fé en la honorabilidad del Gobierno, si vé que la paz con libertad está asegurada, si no espera malas cosechas, los *fondos públicos suben.*

457. Hay sin embargo un factor muy importante, que es la mayor ó menor *abundancia de dinero*, que puede hacer, que á pesar de la confianza en el Gobierno, á pesar de la seguridad de la paz y á pesar de las esperanzas de la buena cosecha, hagan que los títulos *bajen* en vez de *subir*.

Supongamos que *hay escasez de dinero en plaza*, entónces todo el que tiene dinero disponible colocará ese dinero á un *alto interés*, en vez de comprar fondos públicos para renta y probablemente, muchos venderán sus títulos para obtener una renta mayor. Entónces se producirá una *gran oferta y una pequeña demanda* de fondos públicos, lo que producirá la *baja*.

Si por el contrario, hubiera *abundancia de dinero*, se producirá el fenómeno contrario, es decir, será grande la *demanda* y entónces los fondos públicos *subirán*.

458. Cuando en las cotizaciones de bolsa el *valor efectivo* es *igual* al *nominal*, se dice que los fondos públicos *están á la par*.

Si el valor *efectivo* es *mayor* que el *nominal*, se dice que están *sobre par*.

Finalmente, cuando el valor *efectivo* es *menor* que el *nominal*, se dice que están *bajo par*.

459. La compra-venta de los fondos públicos, dá lugar á una variadísima série de operaciones, algunas de ellas complicadas, pero que todas pueden resolverse aplicando la *Regla Conjunta*, como lo hemos hecho en la *Regla de Tres, de Interés y de Descuento*.

Damos á continuación una série de casos prácticos, cuyo simple planteo nos servirá de norma para casos análogos.

PROBLEMA 1.°

Qué **cantidad de fondos** *públicos cotizados al 30 °/o, se podrán adquirir con la suma 1800 $?*

PLANTEO.

Valor nominal	x	——	1800	*Valor efectivo.*
Cotización	30	——	100	*Valor nominal.*

SOLUCION.

$$x = \frac{1800 \times 100}{30} = \frac{180.000}{30} = \mathbf{6000\ \$}\ \textit{Valor nom.}$$

PROBLEMA 2.°

A qué cantidad asciende el **valor efectivo** *de 6000 $ en fondos públicos cotizados al 30 °/o.*

PLANTEO.

Real x —— 6000 *Nominal*
Nominal 100 —— 30 *Real*

SOLUCION.

$$x = \frac{6000 \times 30}{100} = \frac{180.000}{100} = 1800 \text{ \$ } \textit{Valor Real}$$

PROBLEMA 3.°

Qué **renta** *anual se obtiene empleando 2000 $ en fondos públicos del 9 °/ₒ cotizados al 50 °/ₒ.*

PLANTEO.

Renta x —— 2000 *Real*
Real 50 —— 9 *Razón*

SOLUCIÓN.

$$x = \frac{2000 \times 9}{50} = \frac{1800}{50} = 360 \text{ \$ } \textit{Renta}$$

PROBLEMA 4.°

Á razón de **cuánto por ciento** *deben cotizarse los títulos del 9 °/ₒ anual, para que empleando la suma de 2000 $, obtenga una renta de 360 $?*

PLANTEO

Cotización	x	————	9	*Razón*
Renta	360	————	2000	*Valor efectivo*

SOLUCION

$$x = \frac{2000 \times 9}{360} = \frac{18000}{360} = \mathbf{50}\ \textit{Cotización}$$

PROBLEMA 5.°

Suponiendo que se emplean 6000 $ en fondos públicos cotizados al 80 %, y se consigue una renta anual de 480 $, se desea conocer cual es la tasa ó **tanto por ciento** *asignado á los títulos.*

PLANTEO

Razón	x	————	80	*Cotización*
Efectivo	6000	————	480	*Renta*

SOLUCION

$$x = \frac{480 \times 80}{6000} = \frac{38400}{6000} = \mathbf{6{,}40}\ \%\ \textit{Taza}$$

PROBLEMA 6.°

Qué **interés procentual** *se obtendrá empleando una suma de dinero en la compra de títulos del 8 % que están cotizados al 69 %?*

PLANTEO

Razón x ———— 100
69 ———— 8 *Tasa*

SOLUCION

$$x = \frac{100 \times 8}{69} = \frac{800}{69} = \mathbf{11{,}59}\ \%\ \textit{Razón}$$

PROBLEMA 7.°

Qué **cantidad** *se tendrá que desembolsar para comprar una renta de 540 $ en fondos públicos del 9 % cotizados al 80 %, con seis meses de interés vencido?*

PLANTEO

Valor efectivo x ——— 540 *Renta*
9 ——— 80 *Cotización*
80 ——— 84,50 *Id más interés de 6 meses*

REDUCCION

x ———— 540
9 ———— 84.50

SOLUCION

$$x\ \frac{540 \times 84{,}50}{9} = \frac{45630}{9} = \mathbf{5070}\ \$\ \textit{Valor efectivo}$$

Problema 8.°

Cuántos pesos papel se necesitarán entregar en pago de una renta de 640 $ oro en fondos públicos del 10 °/o cotizados al 70 °/o, estando el oro cotizado al 325 °/o.

Planteo

$ papel	x	————	640 $ *oro—Renta*
Taza oro	10	————	70 $ *oro—Cotización*
oro $	100	————	325 $ *papel*

Solucion

$$x = \frac{640 \times 70 \times 325}{10 \times 100} = \frac{14560.000}{1.000} = \mathbf{14560}\ \$\ \textit{papel}$$

Problema 9.°

Teniendo un Gobierno una deuda de 18.000,000 $ por la que paga el 7 °/o de interés anual, deseo conocer cual será la disminución del servicio anual, en caso que consiguiera hacer la conversión de la deuda á títulos del 4 °/o, entregados al 85 °/o de su valor escrito.

Planteo

$$x = \textit{Interés primitivo} - \textit{Interés actual}$$

$$x = \frac{18.000.000 \times 7}{100} - \frac{18.000.000 \times 4}{85}$$

$$x = \frac{126.000.000}{100} - \frac{72.000.000}{85}$$

$$x = 1.260.000 - 847.058,84$$

$$x = \mathbf{412.941,16}\ \textit{Economia}\ \text{de servicio}$$

Regla de Promedio *

460. *Valor medio ó Promedio de varios números, es aquella cantidad que multiplicada por tantas unidades como números hay, nos reproduce la suma de los números dados.*

461. Para hallar el *promedio* de varios números, nos bastará sumar los números dados y dividirlo por tantas unidades como números hay.

Así por ejemplo, el promedio de los números 8, 15 y 16 será el número **13**, porque

$$\begin{array}{r} 8 \\ +\ 15 \\ +\ 16 \\ \hline 39 \end{array} : \mathbf{3} = \mathbf{13}$$

PROBLEMA 1.º

Habiendo comprado tres barricas de azúcar, la 1ª en $ 23.80, la 2ª en $ 25,10 y la 3ª en 24 $, deseo saber cuál será el valor medio.

SOLUCION

$$\begin{array}{r} 23{,}80 \\ 25{,}10 \\ 24{,}00 \\ \hline 72{,}90 \end{array} : \mathbf{3} = \mathbf{\$\ 24{,}30}$$

Problema 2.°

Se ha medido cuatro veces el mismo ángulo hallándose en la 1a lectura 19° 27' 25"; en la 2a, 19° 21 18"; en la 3a, 19° 34' 28" y en la 4a, 19° 29' 53". Se desea conocer el valor medio del ángulo.

Solucion

$$
\begin{array}{r}
19^\circ\,27'\,25'' \\
+\ 19^\circ\,21'\,18'' \\
+\ 19^\circ\,34'\,28'' \\
+\ 19^\circ\,29'\,53'' \\
\hline
77^\circ\,53'\,04''
\end{array}
\ :\ 4 = \mathbf{19^\circ 28'\,16''}
$$

CAPÍTULO XV.

REGLA DE SOCIEDAD *

462. Se llama **regla de Sociedad**, de **Compañia** ó de **Repartición** la que nos enseña á *distribuir una cantidad cualquiera, en partes proporcionales á otras cantidades dadas.*

463. La cantidad que se debe repartir se llama *masa*, las cantidades á las cuales deben ser proporcionales las partes, se llaman *componentes;* la *suma* de estas, se llama *compuesto* y la cantidad correspondiente á cada componente se llama *cuota.*

464. Las cuestiones que requieren la aplicación de la *Regla de Repartición* se pueden resolver de dos modos distintos.

1º Por el **Método de la Reducción á la unidad**, para lo cuál nos bastará *dividir la masa por el compuesto y el cociente multiplicarlo por cada uno de los componentes*.

2ª Por el **Método de las proporciones**, para lo cuál estableceremos tantas proporciones como componente hay, diciendo «*el compuesto es á la masa como cada uno de las componentes es á x*.

Problema 1.º

Repartir el número 962 en partes proporcionales á los números 5, 9 y 12.

Primer Método.

Preparación.

$$\textit{Componentes}\ \begin{cases} \ \ 5 \\ +\ \ 9 \\ +\ 12 \end{cases}$$
$$\textit{Compuesto}\quad 26$$

Solución

$$\textit{Masa}\ 962 : 26 = \mathbf{37} \times \ \,5 = \mathbf{185}\ \ 1^{er}\ \textit{cuota}$$
$$\mathbf{37} \times \ \,9 = \mathbf{333}\ \ 2^{a}\ \ »$$
$$\mathbf{37} \times 12 = \mathbf{444}\ \ 3^{a}\ \ »$$
$$\textit{Comprobación}\quad \mathbf{962}$$

Segundo Método.

$$\textit{Componentes}\left\{\begin{array}{r}5\\9\\12\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{lllllll}
\textit{Compuesto} & 26 : 962 :: & 5 : x & = & 185 & 1^a & \textit{cuota}\\
 & 26 : 962 :: & 9 : x & = & 333 & 2^a & »\\
 & 26 : 962 :: & 12 : x & = & 444 & 3^a & »\\
 & & & & \mathbf{962} & &
\end{array}$$

465. Aplicaremos en todos los casos que estudiemos en adelante solo el 2º Método, es decir el de las proporciones.

466. Esta *Regla de Repartición* tiene aplicación en las sociedades *Mercantiles*, *Rurales*, de *Ganadería*, *repartición de herencias*, *concursos de quiebra*, *liquidación de averías*, etc., etc.

467. En las **reparticiones mercantiles** pueden presentarse *cuatro casos*.

1º *Capitales iguales y tiempos iguales.*

2º *Capitales distintos y tiempos iguales.*

3º *Capitales iguales y tiempos distintos.*

4º *Capitales y tiempos distintos.*

468. Primer caso.—*Cuando los capitales y los tiempos son iguales, se divide la ganancia ó pérdida por el número de socios.*

Problema 2.º

Cuánto le tocará á tres socios que han contribuido con la suma de 2000 $ cada uno, obteniendo una ganancia de 1500 $?

Solución

$$1500 : 3 = 500\ \$\ \textit{á cada socio.}$$

469. Segundo caso.—*Cuando los capitales son distintos, se reparte la ganancia ó pérdida proporcionalmente á los capitales.*

Problema 3.°

Tres individuos A B y C, constituyeron una sociedad aportando el 1° 3400 \$; el 2° 6500, y el 3° 2900 \$.

Al liquidarse la sociedad, se encontró una pérdida de 3200 \$.

Deseo saber cuánto habrá perdido cada uno.

Solución

Capital del 1°	3400	
» » 2°	6500	
» » 3°	2900	
	12800 : 3200 : : 3400 : x =	850 cts. 1ro
	____ : ____ : : 6500 : x =	1625 » 2do
	____ : ____ : : 2900 : x =	725 » 3ro
	Comprobación	**3200 \$**

470. Tercer caso.—*Cuando los capitales son iguales y los tiempos distintos, se reparte la ganancia ó pérdida proporcionalmente á los tiempos.*

Problema 4.º

Un individuo estableció un negocio con un capital de 4000 \$. Ocho meses después introdujo un socio con el mismo capital y tres meses antes de liquidar el negocio entró un tercer socio también con el mismo capital.

Sabiéndose que la Sociedad se disolvió dos años después de abierto el negocio y que la liquidación dejó una utilidad de 15000 \$, se desea conocer la utilidad correspondiente á cada uno.

Solucion

Tiempo del 1er socio 24
» » 2º » 16
» » 3º » 3

$43 : 15000 :: 24 : x = 8372,09$ util. del 1o
$: \_\_\_\_ :: 16 : x = 5581,39$ » 2º
$: \_\_\_\_ :: 3 : x = 1046,52$ » 3º

Comprobación **15.000,00**

471. Cuarto caso.—En este caso, cuando los capitales y tiempos son distintos, *se hace la repartición proporcionalmente al producto de los capitales por los tiempos.*

Ploblema 5.º

Al disolverse una Sociedad Mercantil, compuesta de tres comerciantes, el resultado de la liquidación arrojó una ganancia de \$ 17000.

Se desea conocer la ganancia de cada uno, suponiendo que el 1º tuviera empleada la suma de 3000 \$ durante 6 años, el segundo 8000 \$ durante 4 años y el 3º 6000 \$ durante 3 años.

SOLUCION

3000 × 6 = 18.000 *Componente del* 1º
8000 × 4 = 32.000 » » 2º
6000 × 3 = 18.000 » » 3º

68.000 : 17.000 : : 18.000 : x = 4.500 gan. 1º.
——— : ——— : : 32.000 : x = 8.000 » 2º.
——— : ——— : : 18.000 : x = 4.500 » 3º.

Comprobación **17.000**

PROBLEMA 6.º

Dos individuos hicieron una sociedad con el objeto de explotar un negocio que les dió una pérdida de 8000 $. Se desea saber cuánto deberá perder cada uno, sabiendo que el 1º impuso un capital de 15000 $ durante 2 años 3 meses y 8 dias y el 2º la suma de 20.000 durante 1 año 5 meses y 21 dias.

SOLUCIÓN.

15.000 × 818 *dias* = 12.270.000 *Componente del* 1º
20.000 × 531 » = 10.620.000 » » 2º

22.890.000 *Masa*

luego

12.270.000
10.620.000

22.890.000 : 8000 : : 12.270.000 : x = 4288,33 Pérdida del 1º
——— : ——— : : 10.620.000 : x = 3711,67 » » 2º

Comprobación **8000,00**

472. Damos á continuación varios *problemas resueltos*, sobre *reparticiones* que se presenta á menudo en la práctica y que podrán servir de norma para los múltiples casos que se tengan que resolver.

Sociedad de Empresas

Tres ingenieros se encargaron de la construcción de un teatro mediante la suma de 128.600 $, conviniendo entre sí, en que las utilidades se repartirían proporcionalmente á los días de asistencia al trabajo y al mérito profesional, que se fijaba en **5** *para el 1º; **4** para el 2º y **3** para el 3º.*

Se desea conocer la parte de beneficio que corresponderá á cada uno, sabiendo que el 1er Ingeniero asistió al trabajo 548 días, el segundo 476 y el 3º 323, y que hubo un gasto de 86.900 $.

PREPARACIÓN

128.600 — 86.900 = **41.700** *Ganancias á repartir.*

SOLUCIÓN

$548 \times 5 = 2740$ *Componente del* 1º
$476 \times 4 = 1904$ » » 2º
$323 \times 3 = 969$ » » 3º

$5613 : 41700 :: 2740 : x = 20.355,96$ util. 1º
$\_\_\_ : \_\_\_ :: 1904 : x = 14.145,16$ » 2º
$\_\_\_ : \_\_\_ :: 969 : x = 7.198,88$ » 3º

41.700,00

Sociedades Rurales*

Tres individuos arrendaron en 2540 $ anuales un campo para pastoreo de sus ganados, conviniendo entre sí que cada uno contribuiría al pago con una cuota proporcional de 8 $. por cada animal vacuno y con la de 5 $. por cada animal lanar.

Cuánto deberá pagar cada uno de los arrendatarios suponiendo que el primero introdujo en el campo 920 animales vacunos y 2180 lanares, el segundo 840 vacunos y 1520 lanares y el tercero 760 de la primera y 1480 de la segunda especie.

Preparación.

$$\left.\begin{array}{lr} \text{Animales vacunos del } 1^{o} & 920\times 8 = 7.360 \\ \text{» lanares »} & 2180\times 5 = 10.900 \end{array}\right\} = 18.260 \text{ Comp. del } 1^{o}$$

$$\left.\begin{array}{lr} \text{» vacunos del } 2^{o} & 840\times 8 = 6.720 \\ \text{» lanares »} & 1520\times 5 = 7.600 \end{array}\right\} = 14.320 \text{ » » } 2^{o}$$

$$\left.\begin{array}{lr} \text{» vacunos del } 3^{o} & 760\times 8 = 6.080 \\ \text{» lanares »} & 1480\times 5 = 7.400 \end{array}\right\} = 13.480 \text{ » » } 3^{o}$$

Solucion

$$\begin{array}{r} \text{Comp. del } 1^{o}\ 18.260 \\ \text{» » } 2^{o}\ 14.320 \\ \text{» » } 3^{o}\ 13.480 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 46.060 : 2540 :: 18260 : x = & 1007{,}04 & \text{Cuota del } 1^{o} \\ \_\_\_\_ : \_\_\_\_ :: 14320 : x = & 789{,}64 & \text{» » } 2^{o} \\ \_\_\_\_ : \_\_\_\_ :: 13480 : x = & 743{,}32 & \text{» » } 3^{o} \\ & \mathbf{2540.00} & \end{array}$$

Sociedades de Ganadería *

Un estanciero que tenia 3520 animales vacunos y 2160 lanares, convino con un individuo en que si este concurriese con 1240 animales vacunos y 960 lanares y durante seis años se hiciese cargo de la administración de la estancia, al cabo de este tiempo, se repartirian las utilidades en partes iguales.

Inconvenientes imprevistos dieron lugar á que el socio industrial solo pudiese contribuir con 480 animales vacunos y 540 lanares y que la sociedad se disolviera 2 años y 8 meses antes del plazo estipulado.

Se desea conocer el número de animales vacunos y lanares que en la repartición correspondió á cada socio, en la suposición de que al disolverse la sociedad los animales vacunos eran 6140 y los lanares 5960.

Preparación.

6 *años*	= 72	*meses que debia durar la sociedad.*
2 » y 8 m^s.	= 32	» *faltaban para el plazo convenido.*
	40	» » *duró la sociedad.*

Animales **vacunos** al disolverse la sociedad		6140
» » *primitivos* del estanciero	3520	4000
» » » » encargado	480	
» » *procreados*		**2140**

Animales **lanares** al disolverse la sociedad		5960
» » *primitivos* del estanciero	2160	2700
» » » » encargado	540	
» » *procreados*		**3260**

Repartición de los animales vacunos procreados.

$$3520 + 480 : 3520 + 1240 :: \frac{2140}{2} : x = 1273{,}30 \text{ parte del estanciero}$$

$$866{,}70 \text{ parte del encargado}$$

Comprobación **2140.00**

Repartición de los animales vacunos primitivos del estanciero.

$$72 : 40 :: \frac{3520}{2} : x = 377.70 \text{ parte del } \textit{encargado}$$

2542.30 » » *estanciero*

Comprobación **3520.00**

Repartición de los animales vacunos del encargado

$$72 : 40 : \frac{489}{2} : x = 133{,}40 \text{ parte del } \textit{estanciero}$$

346,60 » » *encargado*

Comprobación **480.00**

Repartición de los animales lanares procreados.

$$2160 + 540 . 2160 + 960 :: \frac{3260}{2} : x = 1861{,}30 \text{ parte del estanciero}$$

$$1398{,}70 \text{ parte del encargado}$$

3260,00

Repartición de los animales lanares primitivos del estanciero.

$72 : 40 :: 2160 : x = 600$ parte del *encargado*
1560 » » *estanciero*
2160

Repartición de los animales lanares primitivos del encargado.

$72 : 40 :: \frac{540}{2} : x = 150$ parte del *estanciero*
390 » » *encargado*
540

RESÚMEN

1273,30 +	2542,30 +	133,40 =	**3949**	anim. vac. corresp. al estanciero
866,70 +	977,70 +	346,60 =	**2191**	anim. vac. corresp. al encargado
2140,00 +	3520,00 +	480,00 =	**6140**	

1861,30 +	1560 +	150 =	**3571,30**	anim. lanares corresp. al estanciero
1398,70 +	600 +	390 =	**2388,70**	anim. lanares corresp. al encargado
3260,00 +	2160 +	540 =	**5960,00**	

Repartición de Herencias. *

Un individuo dispuso que del patrimonio que poseía, valuado en 36000 $ se dedujesen 3720 $ que destinaba á favor de varias instituciones religiosas y que el resto se repartiese de tal modo entre los tres sobrinos que dejaba, que el primero obtuviese 10840 $, el segundo 8920 y el tercero 6580.

Suponiendo que al liquidar la testamentería, sólo se obtuviese $ 26.452, determínese la cuota real que en la repartición cupo á cada heredero.

PREPARACIÓN

26452 — 3720 = **22732** $ *á repartir*

SOLUCION

10840	*Componente*	del	1º
8920	»	»	2º
6580	»	»	3º

26340	: 22732	: : 10840	: x =	9356 $	*Parte*	*del*	1º
———	: ———	: : 8920	: x =	7698 »	»	»	2º
———	: ———	: : 6580	: x =	5678 »	»	»	3º
				22732			

Concurso de Quiebras *

Habiéndose presentado en quiebra un comerciante, presentó como Activo un valor de 42680 $ en bienes y efectos y 27340 $ en cuentas á cobrar, bienes y *cuentas que fueron realizadas con pérdidas del 15 °/ₒ las primeras y de 20 °/ₒ las segundas.*

El Pasivo consistía en 22430 $ á favor de A; 16620 $ á favor de B; 11780 $ á favor de C; 13260 á favor de D y 19340 por las cuentas privilegiadas incluso los gastos judiciales y de administración.

Determínese la cuota que corresponde á cada uno.

Preparación

$100 : 85 :: 42680 : x =$	$ 36.278	Producto de los bienes y efectos.
$100 : 80 :: 27340 : x =$	» 21.872	Producto de créditos.
	58.150	Id total de lo realizado
	19.340	Creditos privilegiados
	38,810	Suma á repartir

Solucion

22.430	$ *á favor de*	A
16.620	» »	B
11.780	» »	C
13.260	» »	D

$64.090 : 38810 :: 22430 : x =$	13.582,60	*Cuota de*	A
$\_\_\_ : \_\_\_ :: 16620 : x =$	10.064,33	» »	B
$\_\_\_ : \_\_\_ :: 11780 : x =$	7.133,42	» »	C
$\_\_\_ : \_\_\_ :: 13260 : x =$	8.029,65	» »	D
	38.810.00		

CAPÍTULO XVI.

Regla de Aligación *

473. Se llama *Regla de Aligación ó Mezcla*, la regla que nos enseña á resolver todas las cuestiones que puede promover la unificación ó comparación de varias entidades *de un mismo género* ó de una misma especie, *pero de calidades ó precios diferentes.*

474. Cuando la unificación se refiere á la unión de metales diferentes, mediante la fusión, se llama **liga** y toma el nombre de **mezcla** cuando se trata de juntar varios objetos como granos, líquidos ú otros objetos suceptibles de constituir una sola *masa.*

475. La regla *de aligación* ó mezcla, se distingue en *medial y alternada.*

Es *medial* ó **regla de promedios**, cuando se trata de *determinar la calidad común ó el precio medio* correspondiente á cada unidad de la *masa* que resulta juntando varias cosas de calidades ó precios diferentes.

Es *alternada*, cuando tiene por objeto *fijar el número de cosas* de distintas calidades ó precios que es menester juntar, para que resulte una masa á la cual corresponde una calidad ó precio común determinado.

476. PRIMER CASO.—*Para conocer la calidad común ó el precio medio correspondiente á cada unidad de la* *masa, se multiplican las varias cantidades que deben constituir la masa por el número característico que las diferencia y se divide la suma de estos productos por la suma de los componentes.*

PROBLEMA

Mezclando 10 qq. de café de $ 9,60; 20 qq. de $ 10,20 y 30 qq. de $ 11,40 determínese el precio medio de cada quintal de mezcla.

SOLUCION

qq.	10 × 9.60	=	96	
»	20 × 10.20	=	204	
»	30 × 11.40	=	342	
	60		642	: 60 = $ **10.70** *precio medio*

477. Para que pueda presentarse la aplicación de la regla de *Aligación ó mezcla alternada*, es *indispensable* que entre las cosas que se trata de juntar, las haya de calidad ó precio *superior é inferior á la calidad ó precio medio* determinado.

Esto es evidente, pues si se nos dá vino de á $ 64 y á $ 70, *nunca se podrá* obtener vino de á 80 $ valor medio.

Si se nos dá arroz de á $ 0,50 el kilo y de á $ 0,60 *tampoco se podrá* obtener arroz de á $ 0,40.

Pero si tenemos vino de á $ 60 y vino de á $ 70, siempre *se podrá* hacer una mezcla, cuyo precio medio será de $ 68, por ejemplo.

478. *Para resolver una cuestión de mezcla alternada, se compara una cantidad mayor y otra menor con el término medio determinado, asignando á la cantidad*

mayor *la diferencia entre el término medio y la menor y asignando á la cantidad* **menor**, *la diferencia entre el término medio y la mayor.*

Las *diferencias indicarán cuantas unidades* ó partes de la unidad se deberán juntar, para conseguir la mezcla *que convenga al término medio determinado.*

Problema 1.°

Cuántas bordalesas de vino de á $ 92, 85,77 y 90 se han de mezclar, para obtener vino de á $ 86 la bordalesa?

Solucion

		Precios	Componentes
Precio medio $ 86.	......	92	1
	......	85	6
	......	77	4
	......	90	9
			20 *bordalesas.*

Lo que nos dice, que debemos comprar **1** bordalesa de á $ 92; **6** bordalesas de á $ 85; **4** bordalesas de á $ 77 y **9** bordalesas de á $ 90, para conseguir **20** bordalesas de vino, cuyo precio medio es de $ 86.

Problema 2.°

Cuántos caballos de á $ 64, $ 65 y $ 74 deberé comprar, para que me cueste término medio $ 68 cada uno?

$$
\begin{array}{lllr}
 & \text{Precios Parciales} & & \text{Componentes} \\
 & \ldots\ldots\ 64 & & 6 \\
\text{Término medio } \$\ 68 & \ldots\ldots\ 65 & & 6 \\
 & \ldots\ldots\ 74 & 4 + 3 = & 7 \\
\hline
 & & & 19 \\
\end{array}
$$

De los cuales 6 de á $ 64: 6 de á $ 65 y 7 de á $ 74.

Efectivamente:

$$
\begin{array}{lrcl}
\textit{Caballos} & 6 \times 64\ \$ & = & 384 \\
\text{»} & 6 \times 65\ \text{»} & = & 390 \\
\text{»} & 7 \times 74\ \text{»} & = & 518 \\
\hline
 & \textit{Costo} & & 1292 : 19\ \textit{caballos} = \mathbf{68\ \$} \\
\end{array}
$$

Regla de Aleaciones *

479. Se llama *Regla de Aleaciones*, á la Regla dè Aligación, cuando se ocupa de estudiar ó calcular las proporciones en que deben entrar dos ó más metales de la misma especie, para obtener una mezcla ó *título* determinado.

El *título* es el *cociente* del *peso del metal* de que se trata, dividido *por el peso* de la aleación.

480. También aquí, puede presentarse la regla de Aleación *medial* y la *alternada*, las cuales se resuelven como sus análogas de la *Regla de Aligación*.

PROBLEMA 1.º

Cuál será el título medio que tendrá la masa que se obtiene fundiendo 4 lingotes de oro, pesando el primero kilógramos 4,50; el segundo kg. 5,40; el tercero kg. 4,80 *y el cuarto kg. 5,30 y teniendo respectivamente los títulos 0,910; 0,865; 0.795; 0,900?*

SOLUCIÓN

Kg. 4,50 × 0,910 = 4,095
» 5,40 × 0,865 = 4,671
» 4,80 × 0,795 = 3,816
» 5,30 × 0,090 = 4,770
» 20,00 17,352 : 20 = **0,8676** *título*

medio y nos dice, que *en diez kilógramos de masa*, había 8676 partes de *oro* y 1324 de materias estrañas.

PROBLEMA 2.º

Qué cantidad de oro con título de 0,910; 0,885; 0,795 y 0,900 se han de mezclar para conseguir una liga con título de 0,890?

SOLUCIÓN.

Título medio 0,890	 0,910	kg. 0,005
	 0,885	» 0,020
	 0,795	» 0,010
	 0,900	» 0,095
		0,130

lo cual nos dice que debemos fundir **5**, **20**, **10** y **95** gramos de oro con el respectivo título de 0,910; 0,885; 0,795 y 0,900 para formar una masa á la cual corresponda el título de 0,890, que representa la pureza del metal oro.

ÍNDICE

ARITMÉTICA

CÁLCULO

POTENCIAS

RAÍZ CUADRADA

RAÍZ CÚBICA

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS ENTEROS

Páginas.

NÚMEROS FRACCIONARIOS

NÚMEROS DECIMALES

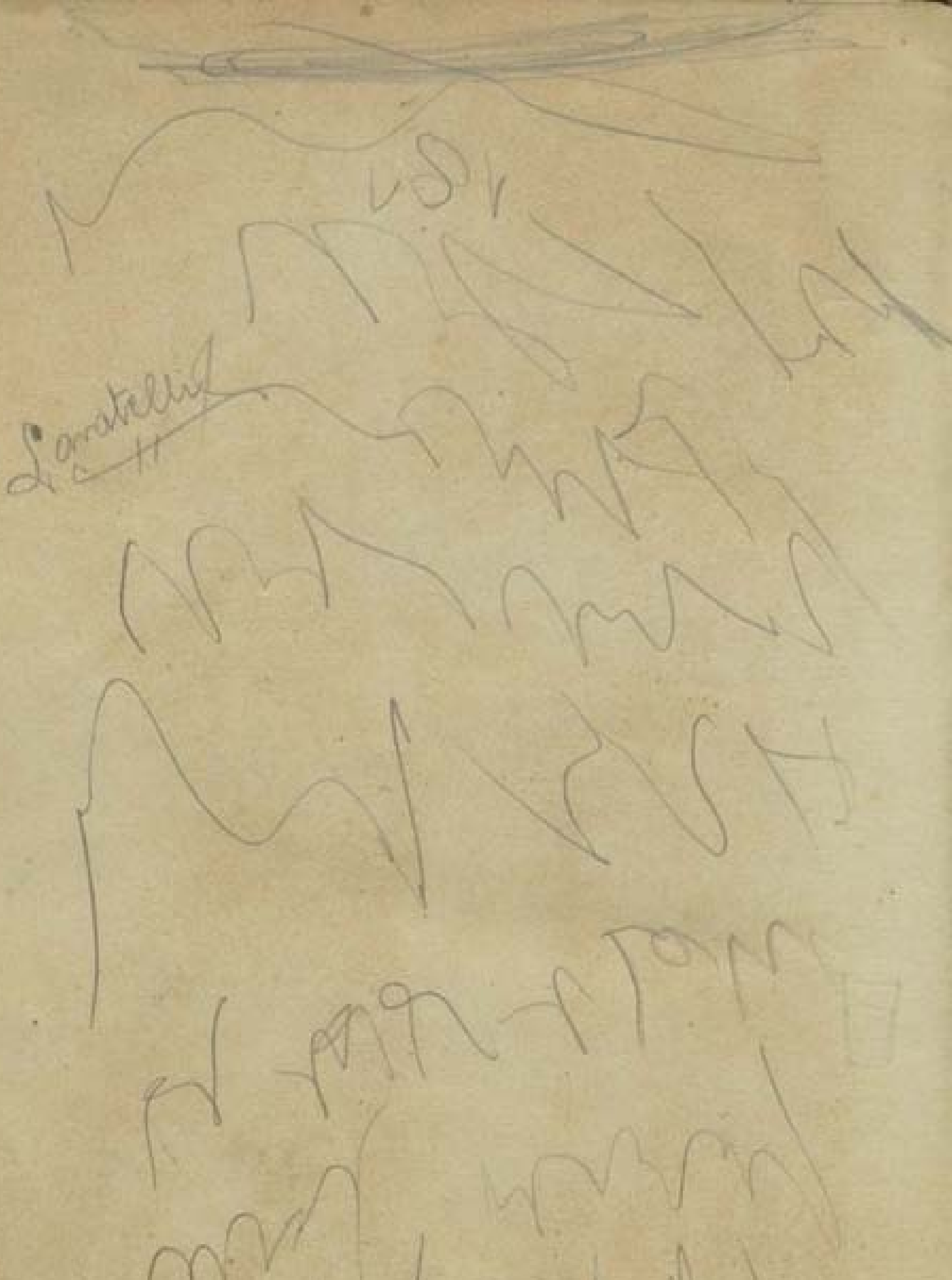
CÁLCULO CONCRETO

SISTEMA MÉTRICO DECIMAL

CALCULO DE NÚMEROS CONCRETOS

COMPARACIÓN DE LOS NÚMEROS

CALCULO MERCANTIL



PUBLICACIONES DE LA CASA

Compendio de Historia Antigua del Abate Drioux (Oriente, Grecia y Roma). Modificado y adaptado al Programa de los Colegios Nacionales de la República, por el Dr. Enrique B. Prack; Profesor de Historia en el Colegio Nacional de la Capital.

Compendio de Historia de la Edad Media del Abate Drioux. Modificado y adaptado al Programa de los Colegios Nacionales de la República, por el Dr. Enrique B. Prack.

Compendio de Historia Moderna del Abate Drioux. Modificado y adaptado al Programa de los Colegios Nacionales, por el Dr. Enrique B. Prack.

[illegible] de Historia Americana, por el Dr. C. Navarro [illegible] en el Colegio Nacional de la Capital.

Este libro [illegible] facilitar el estudio del programa respectivo.

Van Hoorebeke (A.) y Sioen (A.) Nuevo método para aprender el francés, [illegible] Colegios Nacionales y demás establecimientos [illegible] de la República Argentina; 4ª edición, dividida.

Curso de [illegible] año.—Id. id segundo año.—Id id tercer año.—Cero.

Rabier, Emilio.—Curso elemental de Filosofía, traducido de la última edición francesa, adaptado al programa de los Colegios Nacionales por el Dr. [illegible], Profesor de Filosofía del Colegio Nacional de [illegible].

Oyuela, [illegible]—[illegible] del Colegio Nacional de la Capital [illegible] Nacional de Profesores [illegible] con el Programa de los Colegios Nacionales [illegible] considerablemente corregida y ampliada.

Id.—*Colección [illegible] de Literatura [illegible]* (desde el siglo XII hasta nuestros días) (España y [illegible]) [illegible] tomos. Segunda edición corregida y aumentada.

Tomo 1º [illegible] del siglo XII al XVIII.

Id 2º [illegible] id XIX.

Id 3º [illegible] españoles id XII al XVIII.

Id 4º id [illegible] id XIX.

Id 5º id [illegible] americanos.

Se venden por colección y por tomos separados.

Compendio de Historia Contemporánea del Abate Drioux modificado y adaptado para los Colegios Nacionales por el Dr. Enrique B. Prack. Un tomo.

Manual de la Constitución Argentina.—Escrito para servir de texto de Instrucción Cívica en los Establecimientos de Instrucción Secundaria, por el Dr. Joaquín V. González. Un tomo.

ÁNGEL ESTRADA Y Cía.

CALLE BOLÍVAR 466.—BUENOS AIRES.

Imprenta de Juan A. Alsina, México 1422.