ELEMENTOS

DE

GEOMETRIA

ARREGLADOS

Según los Programas de la Enseñanza Secundaria
en la República Argentina

POR EL

Dr. I. P. RAMOS MEJÍA

Profesor en la Facultad de Buenos Aires y en el Colegio Nacional

TOMO I

GEOMETRIA PLANA

TERCERA EDICION

BUENOS AIRES

Angel Estrada y Cia.—Editores
466—Calle Bolivar—466

1897

San Juan

Gumersindo Carrera

ELEMENTOS

DE

GEOMETRIA

4 TA
1897
RAMe
1

ELEMENTOS

DE

GEOMETRIA

ARREGLADOS

Según los Programas de la Enseñanza Secundaria
en la República Argentina

POR EL

Dr. I. P. RAMOS MEJÍA

Profesor en la Facultad de Buenos Aires y en el Colegio Nacional

TOMO I

GEOMETRIA PLANA

TERCERA EDICION

LIBRERIA PORTEÑA
DE
J. A. [illegible]
ESPECIAL [illegible]
ESCRITO[illegible]
BOLIV[illegible]

3a ed
296 p. il

BUENOS AIRES

ANGEL ESTRADA Y CIA.—EDITORES

466—CALLE BOLIVAR—466

1897

D
BIBLIOTECA DEL DOCENTE
21411

M
58

GEOMETRÍA ELEMENTAL

Ligera reseña histórica

El origen de la Geometría se pierde con el tiempo en la antigüedad. Las nociones de perpendicularidad y paralelismo; las propiedades más elementales del círculo, relativas á sus diámetros, sus cuerdas y sus tangentes, así como las primeras nociones de la esfera, eran familiares á los egipcios. Los historiadores griegos nos enseñan que el Egipto fué la cuna de la Geometría, naciendo de la necesidad de medir las superficies agrarias ó de encontrar los límites de las propiedades, después de las inundaciones del Nilo. Sin embargo, puede aceptarse que la historia de la Geometría principia con Thales de Mileto, nacido en Fenicia el año 639 antes de J. C., que fundó en Mileto la escuela Jónica y á quien se atribuye la observación que forma la base de la semejanza de los triángulos equiángulos, de que sus lados son respectivamente proporcionales.

Pitágoras, nacido hácia el año 580 antes de J. C., fué discípulo de Thales: fundó la escuela que lleva su nombre y á él se debe el conocido y célebre teorema del cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

Uno de los sucesores de Pitágoras fué Architas. Platón (430 á 347) siguiendo en Italia sus primeras lecciones, fundó la escuela platónica. Los resultados de las investigaciones de los geómetras de esta escuela fueron reunidos y ordenados por Aristeo, nacido hácia el año 380 antes de J. C. En esta época debemos citar los tratados de *Geometría elemental* de los geómetras griegos: Hippócrates de Chio, Eudosio y Thœtete, que pronto la Geometría de Euclides debía hacer olvidar.

Vienen luego los trabajos de los más célebres geómetras de la antigüedad: Euclides, Arquímedes y Apollonius de Perge.

Euclides, célebre geómetra griego, nacido hácia el año 315 antes de J. C., dió gran impulso á la Geometría, legándonos, además de muchos otros trabajos científicos, sus *Elementos* que se conservan hasta nuestros días como un modelo, tanto por la forma de las demostraciones, como por el encadenamiento de los teoremas. Fué él quien introdujo. en los *Elementos*, el método conocido con el nombre de *reducción al absurdo*.

Arquímedes (287 á 212) parece ser el primer geómetra de la antigüedad que entrevió la doble significación, concreta y métrica, de las fórmulas que traducen los enunciados de los teoremas de Geometría relativos á la comparación de las áreas. Nos legó también la relación aproximada $\frac{22}{7}$ de la razón de la circunferencia al diámetro.

Cuando los romanos dirigieron sus armas contra Siracusa, Arquímedes se puso á la cabeza de la defensa, y sorprende ver como la ciencia de un solo hombre tuvo en jaque, durante tres años, á la armada de Marcellus. Cuando lograron entrar por sorpresa en la ciudad, estaba Arquímedes tan abstraído en la resolución de un problema de Geometría que no sabía lo que pasaba. Un soldado romano se introduce en su casa y le intima que lo siga, Arquímedes le suplica que lo deje terminar su operación, lo cual impacienta al soldado que lo traspasa con su espada.

Marcellus, lamentando la muerte de este gran sábio, le manda construir una tumba sobre la cual, satisfaciendo el deseo de Arquímedes, se coloca una esfera inscrita en un cilindro.

Apenas desaparece Arquímedes bajo las ruinas de Siracusa, cuando brilla en Alejandría Apollonius, que nació hácia el año 245 antes de J. C., y adquiere tanta gloria aunque en otro sentido. Arquímedes trató la rama de la Geometría en que se comparan las magnitudes de la misma naturaleza, mientras que Apollonius hizo progresar, de una manera análoga, la rama que trata especialmente de las propiedades de las figuras. Sus ocho libros sobre las cónicas, consideradas en el cono oblícuo, donde se encierran sus propiedades más interesantes, hicieron que se le llamara *el geómetra por excelencia.*

Citaremos también á Eratósthenes nacido 276 años antes de J. C. que precedió á Apollonius de varios años. Este sábio fué director de la Biblioteca de Alejandría conservándose de él una historia de la *duplicación del cubo.*

Hypsicle (170 años antes de J. C.) nos dejó un tratado sobre los cinco poliedros regulares, que en la mayor parte de los manuscritos se encuentra agregado á los *Elementos de Euclides.*

Nicomedes (160 años antes de J. C.) sólo nos es conocido por la invención de la curva llamada *conchöide* que empleaba en la resolución del problema de la *trisección del ángulo.*

A partir de la época en que figuró Nicomedes, hasta la era cristiana, brillan, particularmente en Astronomía: Hiparco, Germinus, Perseus, Theodosio y Menelaüs.

Hiparco descubrió la Trigonometría, aunque no estudiara sino los triángulos rectángulos.

Germinus (150 años antes de J. C.) á quien se atribuyen dos obras: una referente á la *hélice* y la otra que debió ser una Historia de la Geometría.

Perseus (140 años antes de J. C.) autor de un tratado de las secciones del *toro*, obra que se supone perdida.

Theodosio (130 años antes de J. C.) á quien se deben tres tratados elementales: uno relativo á la esfera, otro á los climas y el tercero á la igualdad de los días y las noches.

A Menelaüs (50 años antes de J. C.) se debe el teorema célebre de los seis segmentos que una transversal cualquiera determina sobre los lados de un triángulo, teorema que durante mucho tiempo se atribuyó á Ptolomeo nacido el año 100 de nuestra era.

Una serie de teoremas viene posteriormente, llamados á ser de una gran importancia en la ciencia y que con probabilidad se deben á Pappus, nacido en Alejandría el año 350 de la era cristiana; Serenus, contemporáneo de Pappus, puso de manifiesto la identidad de las secciones del cono y cilindro; y Proclus (412 á 485) la generación de la *elipse* por el movimiento de un punto de una recta de longitud constante que resbala sobre dos rectas fijas.

Las obras notables que encontramos después son: las de Diophanto y sus discípulos, principalmente de Herón de Alejandría, nacido hácia el año 550, autor del primer tratado de Agrimensura.

Diophanto, verdadero genio, fué el precursor de Viete. Por los enunciados de los problemas de Aritmética y Álgebra, se ve que ellos fueron tomados de los enunciados de los de Geometría contenidos en los *Elementos de Euclides*, estando ordenados casi en la misma forma. Puede decirse, que él fué el modelo de los geómetras árabes, Leonardo de Pisa (1170 á 1220) y Tartaglia, formando el lazo de unión entre los geómetras antiguos y los modernos.

Desde Herón hasta Viete (1540 á 1603) se entroniza el método algebráico en la Geometría.

Después del saqueo de Alejandría por Omar, que incendió su rica y vasta Biblioteca, calentando, al decir de Cantu, el agua de los baños públicos con los manuscritos, la ciencia se refugió en la India. Brahme-Gupta (600 año J. C.) fué el primero y más ilustre de los representantes de la escuela Indo-árabe.

La aplicación del Álgebra á la Geometría se introdujo en Europa por Leonardo de Pisa, siendo cultivada: por Regiomontanus (1436 á 1470); por Lucas de Burgo (1460 á 1523) y Cardán (1501 á 1576).

Viete imprimió un carácter definido á la aplicación del Álgebra á la Geometría y puede decirse que sus trabajos coronaron la obra de más de quince siglos, pero se reservaba á Descartes la gloria de dar la última mano á la obra.

En este tiempo aparecen, Neper (1550 á 1618), inventor de los *logaritmos*, y Copérnico que se dedicó especialmente á la Astronomía.

Los grandes nombres de Kepler, de Galileo y de Cabalieri, aparecen en la Historia.

Kepler (1571 á 1631), uno de los creadores de la Astronomía moderna, llamó la atención en esta ciencia, siendo curioso observar que su método para la representación gráfica de las circunstancias de una eclipse, se acerca singularmente á los procedimientos de la *Geometria descriptiva de Monge.*

Galileo (1564 á 1642) sólo es conocido en Geometría por el descubrimiento de la curva llamada *sicloide*, de la cual no encontró, sin embargo, ninguna de sus importantes propiedades. Este sábio, que produjo una revolución en la ciencia astronómica levantando grandes resistencias entre sus contemporáneos, llamado á comparecer en 1633 ante el Tribunal del Santo Oficio, fué compelido á abjurar de sus doctrinas, pronunciando sus jueces la siguiente sentencia digna de recordarse:

« Sostener que el Sol está inmóvil en el centro del « mundo es una opinión *absurda, falsa en filosofia « y formalmente herética*; sostener que la tierra no « está en el centro del mundo, que no está inmóvil y « que está animada de un movimiento de rotación, « es también una proposición *absurda, falsa en filosofia* y no menos *errónea en la fé* ».

En cuanto á la frase tradicional *E pur si muove!* ha sido necesario reconocer, que si bien pudo pensarla, no la pronunció delante de sus jueces que no lo comprendían y que eran sus declarados enemigos.

Cabalieri (1598 á 1647), publicó en 1635 su *Geometría de los indivisibles* y sus *Ejercicios geométricos* que aparecieron en 1647 y contienen las demostraciones del famoso teorema de Guldin y de los teoremas que Kepler no había podido obtener.

Los notables trabajos que debían inmortalizar á Descartes, Fermat, Roberbal, Desargues, Pascal, Huygens, Wallis y Barrow, vienen en seguida.

René Descartes (1596 á 1650) hizo grandes trabajos en la ciencia, de los cuales solo se conserva intacta su Geometría. No indica él sino someramente, el modo como aplicaba el cálculo al estudio de las relaciones geométricas, no comprendiendo sus comentadores lo novedad y sencillez de su sistema.

Descartes dice: «Todos los problemas de Geome« tría se pueden reducir á tales términos, que no « será necesario para construirlos sino el conoci« miento de la longitud de algunas líneas rectas». El más bello título que tiene Descartes en esta ciencia es su *Geometría Analítica*, donde refiere el estudio de las curvas al de las ecuaciones que las representan. Toda curva plana puede considerarse como engendrada por un punto móvil que sigue una cierta ley; y á los medios de fijar su posición, en un instante cualquiera, llamó Descartes, coordenadas del punto móvil, las que varían en su naturaleza de una curva á otra.

Blás Pascal (1623 á 1662), á quien por su tierna edad prohibiera su padre el estudio de las matemáticas, le preguntó un día, cuál era el objeto de la Geometría, contestándosele vagamente, que era el arte de construir las figuras, de encontrar su medida y de conocer las relaciones entre sus partes. Esto bastó á Pascal para obtener, con la sola reflexión, las 31 primeras proposiciones de Euclides y cuando se ocupaba en buscar la siguiente, relativa á la suma de los ángulos de un triángulo, le sorprendió su padre, en medio de multitud de figuras geométricas que había trazado sobre el pavimento. Interrogándolo y de cuestión en cuestión, le arrancó el secreto de su prodigioso trabajo. Permitióle entonces la lectura de las obras de Euclides, que hizo sin dificultad y sin ayuda alguna. A los 16 años de edad compuso un tratado de las *secciones cónicas*, que Descartes se resistió á creer fuera la obra de un adolescente.

Christian Huygens (1629 á 1695) geómetra, físico y astrónomo holandés, se estrena en 1651 con un tratado sobre la *cuadratura del círculo, de la elipse y de la hipérbola*, haciendo progresar á la Geometría al mismo tiempo que hacía grandes descubrimientos en la Física y en la Astronomía.

John Wallis (1616 á 1703), célebre geómetra inglés, fué catedrático de Geometría en la Universidad de Oxford. Su tratado analítico de las secciones cónicas, primera obra donde estas curvas han sido consideradas como del 2.º grado, según el método de las coordenadas cartesianas, contiene todas las propiedades de estas líneas que se deducen de su definición analítica. Pero la gran obra de Wallis es su *Aritmética de los infinitos*, que hizo progresar notablemente á la Geometría, en todas las cuestiones que son hoy del dominio del Cálculo Integral.

Isaac Barrow (1630 á 1677), geómetra inglés y profesor de matemáticas en la Universidad de Cambrige, tuvo como discípulo al gran Newton á quien posteriormente dejó su cátedra. Contribuyó con sus trabajos al progreso de la ciencia, traduciendo en pequeños volúmenes los tratados de Euclides, de Arquímedes, de Apollonius y de Theodosio. Se le considera como inventor del triángulo diferencial de donde se deduce inmediatamente la sub-tangente de una curva cualquiera.

En un largo período, la Geometría se enriquece con el método de *los isoperímetros* de Bernouilli (1654 á 1708); con el notable teorema de Newton (1642 á 1727), sobre la generación de todas las curvas del tercer orden; con el teorema de Maclaurin (1698 á 1746) sobre la atracción de un elipsoide; con la teoría de las curvas de doble curvatura debida á Clairaut (1713 á 1763), y por último, con la teoría de la curvatura de las superficies debida á Leonardo Euler (1707 á 1783), en quien se reconoce á uno de los geómetras más ilustres de los tiempos modernos.

A continuación de los trabajos mencionados, viene para la Geometría el brillante período contemporáneo cuyos principales iniciadores fueron: Gaspar Monge (1746 á 1818), fundador de la escuela Politécnica de Paris y á quien se debe el descubrimiento de las reglas elementales y generales de la *Geometría Descriptiva;* Carnot (1753 á 1823), y Poncelet (1788 á 1867).

Observaremos, para terminar, que la Geometría elemental de los antiguos se distingue de la de los modernos por dos caracteres bien definidos. Por una parte los geómetras griegos, aún cuando reconocieron la equivalencia entre las áreas de dos figuras planas ó entre los volúmenes de dos cuerpos comprendidos en los elementos, jamás se propusieron obtener nada análogo á lo que nosotros llamamos, la medida de una superficie ó de un volúmen. La Geometría de los antiguos era puramente teórica. Por otra parte, jamás sacaron ellos, de las relaciones

BIBLIOTECA DEL DOCENTE

sencillas constatadas entre las superficies ó volúmenes que habían comparado, las relaciones más complicadas que existen entre los elementos lineales de estas superficies ó volúmenes.

La Geometría elemental se divide en *Geometría plana*, que se ocupa exclusivamente de las figuras cuyos elementos están todos en un plano; y en *Geometría del espacio* donde se estudian las figuras cuyos elementos no están en un solo plano.

ALFABETO GRIEGO

ALFABETO GRIEGO DISPUESTO EN EL ORDEN ORDINARIO

LETRAS		NOMBRES	VALOR
Mayúsculas	Minúsculas		
Α	α	alpha	*a*
Β	β	beta	*b, v*
Γ	γ	gamma	*g*
Δ	δ	delta	*d*
Ε	ε	epsilon	*e* breve
Ζ	ς	dzeta	*z*
Η	η	eta	*é* larga
Θ	θ	theta	*th*
Ι	ι	iota	*i*
Κ	ϰ	cappa	*k*
Λ	λ	lambda	*l*
Μ	μ	mu	*m*
Ν	ν	nu	*n*
Ξ	ξ	ksi	*x*
Ο	ο	omicron	*o* breve
Π	π	pi	*p*
Ρ	ρ	ro	*r*
Σ	σ	sigma	*s*
Τ	τ	tau	*t*
Υ	υ	upsilon	*u v*
Φ	φ	phi	*f*
Χ	χ	khi	*k*
Ψ	ψ	psi	*ps*
Ω	ω	omega	*ô* larga

GEOMETRÍA PLANA.

PRIMERA PARTE.

LIBRO PRIMERO.

Nociones preliminares.—Definiciones.

1) La observación de cuerpos diferentes nos dá la idea *de extensión, de forma* y *de posición* respectiva; concibiendo en seguida la extensión, la forma y la posición de una manera abstracta, es decir, con independencia de los cuerpos.

2) La extensión se nos presenta bajo tres aspectos diferentes; VOLUMEN, SUPERFICIE y LONGITUD.

VOLUMEN de un cuerpo es la porción del espacio que ocupa, siendo independiente de la especie de materia de que el cuerpo está formado. La extensión en volumen se considera, en los elementos, solo en *tres sentidos principales*, que se llaman *dimensiones*, y que se designan con los nombres de *longitud, latitud* y *altura, profundidad* ó *espesor*.

SUPERFICIE de un cuerpo es lo que limita su volumen y determina su forma ó figura. La extensión superficial es diferente de la extensión en volumen;

ella solo tiene dos dimensiones que son: *longitud* y *latitud*, estando desprovista de espesor.

La intersección de dos superficies, que mútuamente se penetran en el espacio, es lo que se llama LÍNEA. La extensión de una línea es diferente de la extensión en volumen y de la extensión superficial, ella tiene solo una dimensión que es la *longitud*.

Cuando dos líneas se cortan, su intersección forma un PUNTO. Al punto no se le atribuye extensión y solo interviene por su posición.

3) LA GEOMETRÍA es la ciencia de la extensión, de la forma y de la posición, considerada de una manera abstracta. Se funda en un cierto número de principios evidentes por sí mismos que se llaman *axiomas*. Los unos son de carácter general, es decir, pertenecen á todas las ciencias, y los otros en particular á la geometría.

Entre los axiomas generales, citaremos los tres siguientes de uso frecuente:

1.° *Dos cantidades iguales á una tercera son iguales entre sí.*

2.° *Si á dos cantidades iguales, se les suma ó resta una misma cantidad, los resultados son iguales entre sí.*

3.° *Si tres cantidades a, b, c, son tales, que se tenga* $a > b$ y $b > c$; *se tendrá también que* $a > c$.

En cuanto á los axiomas particulares á la geometría, los formularemos en el curso de la obra.

Términos usados en Geometría.

4) Se llama PROPOSICIÓN, al enunciado de una verdad. Hay diferentes proposiciones en geometría, siendo los TEOREMAS las principales.

TEOREMA, es una proposición que no es evidente por sí misma, pero que se vuelve tal, por medio de la DEMOSTRACIÓN. Distinguiremos tres partes en todo teorema, que son: 1.ª la HIPÓTESIS, *que es un conjunto de condiciones que se suponen realizadas*; 2.º la CONCLUSIÓN, *que es la propiedad que debe resultar de la hipótesis*; 3.º el RAZONAMIENTO, *que es una serie de raciocinios que deben conducir de la hipótesis á la conclusión.*

PROBLEMA, es una cuestión en la cual se propone: siendo dadas ciertas cantidades ó figuras, encontrar otras que tengan con las primeras, relaciones determinadas, en cuyo caso se dice que se ha *resuelto* el problema.

LEMA, es una verdad que resalta poco y sirve para demostrar un teorema ó para resolver un problema.

COROLARIO, es una proposición particular que resulta inmediatamente de otra que se acaba de demostrar.

Son RECÍPROCAS dos proposiciones, cuando la hipótesis de la primera es conclusión de la segunda, é inversamente.

5) La más sencilla de las figuras geométricas es la *línea recta* que no definiremos porque esta noción, tan clara para cada uno de nosotros, es inseparable de la de las proposiciones que siguen, que admitiremos como evidentes y que constituyen los primeros axiomas de la Geometría:

1.° *Entre dos puntos, siempre se puede trazar una sola línea recta prolongada á partir de estos puntos;*

2.° *La recta da la menor distancia que hay entre dos puntos.*

Se designa un punto por una letra cualquiera. Para nombrar una recta se enuncian dos puntos de esta recta, así la línea A B es la que pasa por los puntos A y B

(Figura 1.)

Toda línea formada por porciones finitas de líneas rectas es una *línea quebrada* ó *poligonal*.

Una línea es *curva*, cuando no es recta ni quebrada. Existe una infinidad de especies de líneas curvas que tienen su definición propia.

6) Entre las superficies, se distingue la *superficie plana* ó el *plano*.

El *plano* es una superficie indefinida y tal, que aplicando una recta á dos cualesquiera de sus puntos, coincide con ella en toda su extensión.

Una figura es *plana*, cuando todos sus elementos están contenidos en un mismo plano.

Toda superficie que no es plana ni compuesta de superficies planas, es una superficie *curva*.

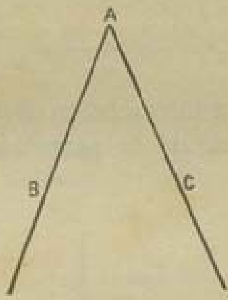
Dos figuras son *iguales* cuando se puede hacerlas coincidir aplicando una de ellas sobre la otra.

Se dice que dos figuras son *equivalentes*, cuando tienen la misma *extensión* sin tener la misma forma.

Ángulos.

7) Cuando dos líneas rectas parten de un punto **A** siguiendo dos direcciones diferentes AB, AC, forman una figura que se llama *ángulo*.

(Figura 2.)



Las rectas AB, AC, son los *lados* del ángulo y su punto común A, el *vértice*.

Un ángulo se designa por una letra colocada en su vértice, cuando está aislado; en caso contrario, se marcan dos puntos sobre los lados del ángulo y se enuncia la letra del vértice entre estos dos puntos. Así, el ángulo BAC tiene por vértice al punto A y sus lados pasan respectivamente por los puntos B y C.

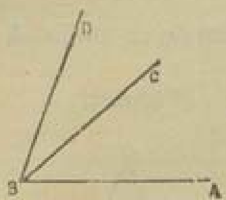
La magnitud de un ángulo depende sólo del alejamiento de sus lados que siempre deben concebirse prolongados indefinidamente.

Para darnos una idea de la generación y magnitud de los ángulos, imaginaremos que AC coincida, en su primera posición, con AB, y que la hacemos girar alrededor del punto A. La cantidad α de que ha girado la recta AC, en una posición cualquiera, es precisamente la magnitud del ángulo.

(Figura 3.)

8) Cuando dos ángulos tienen el vértice común y un lado común intermediario, se dice que son *ángulos adyacentes*.

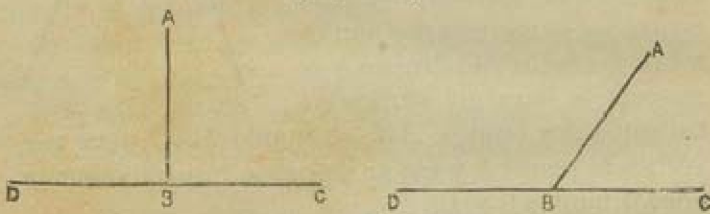
(Figura 4.)



Tales son los ángulos ABC y CBD.

9) Una línea recta AB, será *perpendicular ú oblicua* á otra línea recta CD, cuando forme con esta dos ángulos adyacentes iguales ó desiguales. En uno y otro caso, la intersección B de las dos líneas rectas se llama pié de la perpendicular ó de la oblícua.

(Figura 5.)



Se llama *ángulo recto*, á todo ángulo en que sus lados son respectivamente perpendiculares.

Teorema 1.

10) *Por un punto* O *de una recta dada* AB, *se puede siempre tirar una sola perpendicular á esta recta.*

(Figura 6.)

En efecto, tiremos por el punto O una recta cualquiera OC y si resulta que

$$\alpha = \beta,$$

es decir, si los ángulos adyacentes α y β son iguales, la línea recta OC será perpendicular á la AB. En caso contrario, admitiendo que sea

$$\alpha < \beta$$

haríamos girar la recta OC hasta que coincida con OB. En este movimiento el ángulo α crece de una manera contínua, mientras que el β decrece del mismo modo hasta anularse. Por consiguiente, la recta OC pasará por una posición OD en la cual se verifique que

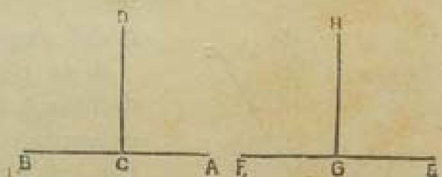
$$\alpha = \beta.$$

Esta posición es única, pues antes ó después de ocuparla, la recta OC formará con AB dos ángulos adyacentes desiguales.

11) COROLARIO. — *Todos los ángulos rectos son iguales.*

Siendo las líneas rectas, CD perpendicular á AB, y GH perpendicular á EF; digo que el ángulo recto ACD, es igual al ángulo recto EGH.

(Figura 7.)



Para probarlo, trasportemos el ángulo ACD sobre el ángulo EGH, hasta aplicar la recta AB sobre EF, y de tal manera que el punto C coincida con el punto G. La línea recta CD, perpendicular á AB, tomará la dirección de la recta GH perpendicular á EF; el ángulo ACD coincidirá con el ángulo EGH, y estos dos ángulos serán iguales.

OBSERVACIÓN.— Como el ángulo recto es una cantidad constante, se ha tomado como unidad en la medida de los ángulos.

Un ángulo se llama *obtuso* ó *agudo* según que sea mayor ó menor que un recto. (*)

12) DEFINICIÓN.—Se dice que dos ángulos ABC y DBE son *opuestos por el vértice*, cuando los lados de uno de ellos, son prolongaciones de los lados del otro.

(Figura 8.)

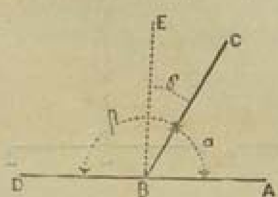
Dos ángulos son *complementarios*, cuando su suma es igual á un recto.

Dos ángulos son *suplementarios*, si valen enc onjunto, dos rectos.

Teorema 2.

13) *Toda recta* BC *que encuentra á otra AD, forma con ella, dos ángulos adyacentes* α *y* β *cuya suma es igual á dos ángulos rectos.*

(Figura 9.)



Si la recta BC es perpendicular á AD, el teorema es evidente puesto que los ángulos α y β son rectos.

En caso contrario, tirando por el punto B la perpendicular BE, esta formará con BC un ángulo γ y se tendrá:

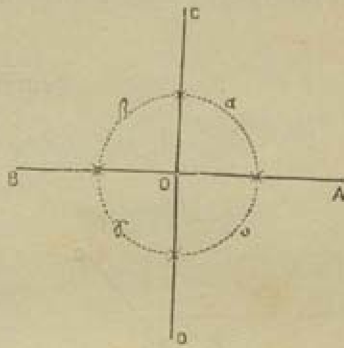
$$\alpha + \gamma = 1 \text{ recto,}$$
$$\beta - \gamma = 1 \text{ recto,}$$
$$(^{**}) \quad \therefore \quad \alpha + \beta = 2 \text{ rectos.}$$

(*) Diremos para abreviar, *un recto* en vez de *un ángulo recto*, y así también, *una recta* en vez de decir *una línea recta*.

(**) El signo ∴, indica: por consecuencia; luego; etc.

14) Corolario I.—*Cuando uno de los cuatro ángulos, que forman dos rectos* AB, CD, *que se cortan es recto, los otros tres también lo son.*

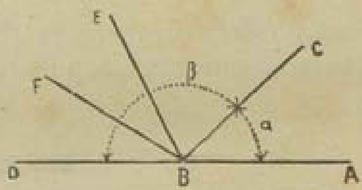
(Figura 10.)



En efecto, si el ángulo α es recto, lo serán también β y δ por ser suplementos de α, y en fin, γ será recto por ser suplemento de β.

15) Corolario II.—*La suma de todos los ángulos formados alrededor del punto* B *y de un lado de la recta AD, es igual á dos rectos.*

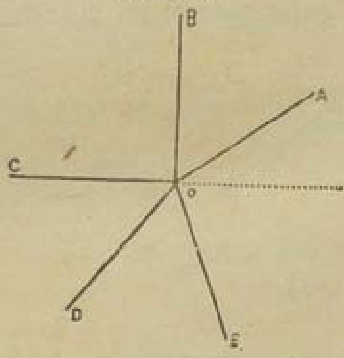
(Figura 11.)



En efecto, el ángulo α tiene por suplemento al ángulo β que es la suma de todos los otros.

16) Corolario III.—*La suma de todos los ángulos formados en un plano, alrededor de un punto, es igual á cuatro ángulos rectos.*

(Figura 12.)

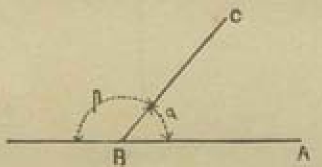


En efecto, considerando los ángulos que forman las rectas OA, OB, OC, OD, OE, alrededor del punto O, si prolongamos la recta OC, todos los ángulos formados sobre la recta OC valen dos rectos; los formados debajo de la misma recta valen también *dos* rectos y por consiguiente, la suma total valdrá *cuatro* ángulos rectos.

Teorema 3.

17) *Si dos ángulos adyacentes* α y β, *son suplementarios, los lados no comunes* AB y BD, *están en línea recta.*

(Figura 13)

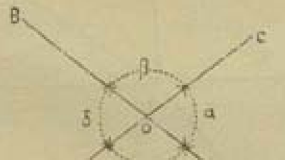


En efecto, la prolongación de la recta AB, á partir del punto B, debe formar con BC un ángulo igual al suplemento del ángulo α, es decir, igual al ángulo β, y luego, coincidirá con la recta B D.

Teorema 4.

18) *Cuando dos rectas* AB, CD, *se cortan, los ángulos opuestos por el vértice son iguales de dos en dos.*

(Figura 14)



En efecto,

(1) $\alpha + \beta = 2$ rectos,

por ser ángulos adyacentes;

$\alpha + \gamma = 2$ rectos,

por la misma razón, entonces

$$\beta = \alpha + \gamma$$

$$\beta = \gamma$$

Del mismo modo veríamos que

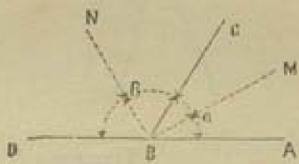
$$\alpha = \delta$$

Teorema 5.

19) *Las bisectrices* (*) *de dos ángulos adyacentes y suplementarios, son perpendiculares entre sí.*

Sean α y β dos ángulos adyacentes, tales que $\alpha + \beta = 2$ rectos, y sean B M y B N las bisectrices de estos ángulos, tendremos:

(Figura 15)



$$M\,B\,C = \frac{\alpha}{2},$$

$$C\,B\,N = \frac{\beta}{2},$$

y sumando, miembro á miembro, estas igualdades

$$M\,B\,C + C\,B\,N = M\,B\,N = \frac{\alpha + \beta}{2} = 1 \text{ recto.}$$

y luego la bisectriz B M será perpendicular á la B N.

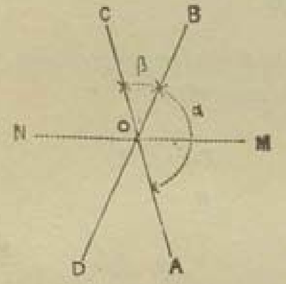
Teorema 6.

20) *Las bisectrices de los ángulos opuestos por el vértice, están en línea recta.*

(*) Se llama bisectriz de un ángulo, á la recta que lo divide en dos iguales.

Sean A O B y C O D los ángulos considerados, y O M, O N, sus bisectrices, será

(Figura 16.)



$$M\,O\,B = \frac{\alpha}{2} = C\,O\,N,$$

$$B\,O\,C = \beta,$$

luego,

$$M\,O\,B + B\,O\,C + C\,O\,N = \\ = \alpha + \beta = 2 \text{ rectos}$$

y O N es prolongación de M O.

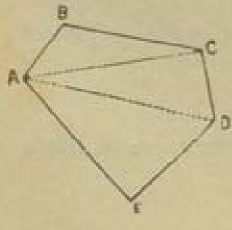
Teorema 7. (á demostrar)

Cuando cuatro ángulos adyacentes valen cuatro ángulos rectos; si el primero es igual al tercero y el segundo al cuarto, los lados de estos ángulos estarán dos á dos en línea recta.

De los polígonos en general.

21) Un *polígono* es una figura plana limitada por líneas rectas.

(Figura 17.)



Las líneas A B, B C, C D, E A, se llaman *lados* y el conjunto de los lados, *contorno* ó *perímetro* del polígono.

Un polígono tiene tantos ángulos como lados.

Las líneas que unen dos vértices no consecutivos, tales como las AC y AD, se llaman *diagonales*.

Los polígonos se distinguen por el número de sus lados y se llaman:

TRIÁNGULO,	si	tiene	tres	lados
CUADRILÁTERO	»	»	cuatro	»
PENTÁGONO	»	»	cinco	»
EXÁGONO	»	»	seis	»
OCTÓGONO	»	»	ocho	»
DECÁGONO	»	»	diez	»
DODECÁGONO	»	»	doce	»
PENTADECÁGONO	»	»	quince	»

Los demás polígonos no tienen nombres particulares y se les designa por el número de sus lados. Así se dice: un polígono de trece lados, de catorce lados, etc.

Triángulos.

22) DEFINICIONES.—Un triángulo es una porción de plano terminada por tres rectas que se cortan dos á dos, que se llaman *lados* del triángulo. Los ángulos que forman dos lados consecutivos, y los vértices de estos ángulos, se llaman también *ángulos* y *vértices* del triángulo.

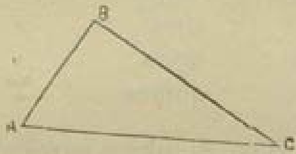
El triángulo se llama: *equilátero* si tiene sus tres lados iguales; *isósceles* si tiene dos lados iguales; *escaleno* si tiene sus tres lados desiguales.

Cuando un triángulo tiene un ángulo recto, toma el nombre de *triángulo rectángulo*. El lado opuesto al ángulo recto se llama *hipotenusa* y los otros dos, *catetos.*

Teorema 8.

23) *Un lado cualquiera de un triángulo, es menor que la suma de los otros dos.*

(Figura 18)



En efecto, la recta A C es el camino más corto del punto A al C, luego A C será menor que la quebrada A B C, es decir,

$$AC < AB + BC.$$

24) Corolario.—Si de los dos miembros de la desigualdad

$$AC < AB + BC,$$

se resta el lado B C, se tendrá la nueva desigualdad

$$AC - BC < AB$$

que conduce á este otro enunciado del teorema precedente:

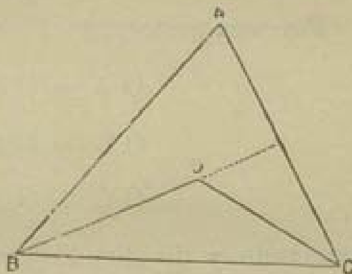
Un lado cualquiera de un triángulo, es mayor que la diferencia de los otros dos.

Teorema 9.

25) *Si de un punto* O, *tomado en el interior de un triángulo* A B C, *se tiran rectas* O B, O C, *á los extremos de un lado* B C, *la suma de estas dos rectas,*

es menor que la suma de los otros dos lados A B, A C, *del triángulo.*

(Figura 19)



Si prolongamos la recta B O hasta el punto D donde encuentra al lado A C, tendremos en el triángulo A B D:

$$BO + OD < BA + AD,$$

y en el triángulo C O D:

$$OC < OD + DC$$

Sumando, miembro á miembro, estas desigualdades, tendremos

$$BO + OC + OD < BA + AD + DC + OD$$

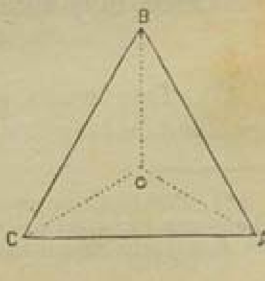
pero $AD + DC = AC,$

$$\therefore \quad BO + OC < BA + AC$$

Teorema 10.

26) *La suma de las líneas que unen un punto* O, *interior de un triángulo* A B C, *á los tres vértices, es menor que la suma y mayor que la semi-suma de los tres lados del triángulo.*

(Figura 20)



En efecto, (25), tenemos

$$OA + OB < CA + BC,$$
$$OB + OC < CA + AB,$$
$$OC + OA < AB + BC,.$$

y sumando, miembro á miembro, y dividiendo por 2, resulta

$$OA + OB + OC < AB + BC + CA$$

Por otra parte (23),

$$OA + OB > AB,$$

$$OB + OC > BC,$$

$$OC + OA > CA,$$

sumando y dividiendo por 2 ambos miembros, resulta

$$OA + OB + OC > \tfrac{1}{2}(AB + BC + CA)$$

Teoremas á demostrar.

1—*El perímetro de un polígono convexo* (*) *es menor que toda línea que lo envuelva.*

2—*La suma de los diagonales de un cuadrilátero convexo, es menor que la suma y mayor que la semi-suma de todos sus lados.*

Casos más sencillos de igualdad de los triángulos.

27) Tres casos principales se presentan en la igualdad de los triángulos, y son:

(*) Polígono convexo es el que no tiene ángulos entrantes, ó el que una recta, en posición cualquiera en su plano, no encuentra á su perímetro en más de dos puntos.

1.°—*Cuando tienen respectivamente iguales, un lado y los ángulos adyacentes;*

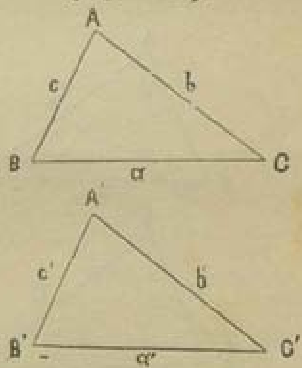
2.°—*Cuando tienen respectivamente iguales, dos lados y el ángulo comprendido;*

3.°—*Cuando tienen respectivamente iguales, sus tres lados.*

Teorema 11.

28) 1^er^ CASO.—*Dos triángulos son iguales, cuando tienen respectivamente iguales, un lado y los ángulos adyacentes.*

(Figura 21.)



Siendo A B C y A' B' C', dos triángulos que satisfacen á las condiciones, (*)

$$(^1) \left\{ \begin{array}{l} \text{ang } B = \text{ang } B' \\ \text{ang } C = \text{ang } C' \end{array} \right.$$

$$(^2) \quad \text{lado } a = \text{lado } a',$$

los triángulos serán iguales.

En efecto, trasportemos el triángulo A' B' C' sobre el A B C, haciendo coincidir el lado *a'* sobre el lado *a* que son iguales. Entonces, el lado *c'* tomará la dirección del lado *c*, por ser iguales los ángulos B', B; el lado *b'*, análogamente tomará la dirección del lado *b*, por ser los ángulos C', C, iguales; el punto común á los lados *b'*, *c'*, se colocará sobre el punto común

(*) Para mayor sencillez, designaremos los ángulos de un triángulo, por las letras mayúsculas A, B, C, de sus vértices, y por las letras minúsculas *a*, *b*, *c*, los lados opuestos á estos ángulos.

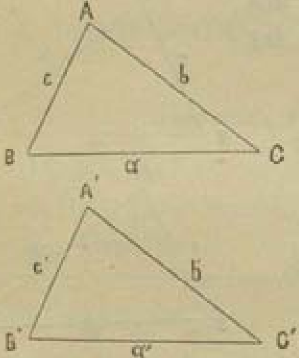
á los lados b, c, y los triángulos A' B' C', A B C, que coinciden en toda su extensión son iguales entre sí.

Corolario.—Cuando dos triángulos tienen respectivamente iguales, un lado y los ángulos adyacentes, los lados opuestos á los ángulos iguales, son también iguales.

Teorema 12.

29) 2.º caso.—*Dos triángulos son iguales, cuando tienen respectivamente iguales, dos lados y el ángulo comprendido.*

(Figura 22.)



En efecto, siendo A B C, A' C' B', dos triángulos que satisfacen á las tres condiciones

$$A = A'$$
$$b = b',$$
$$c = c',$$

los dos triángulos serán iguales.

Para probarlo, trasportemos el triángulo A' B' C' sobre el A B C, de manera que el ángulo A' se aplique sobre el ángulo A, entonces los lados b', c', seguirán las direcciones de los lados b, c, coincidiendo en toda su extención por ser iguales, y el lado a' se aplicará exactamente sobre el lado a. Estos triángulos que coinciden en toda su extensión serán pués, iguales.

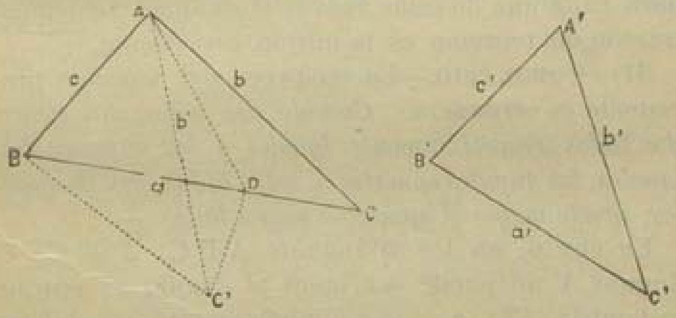
Corolario.—Cuando dos triángulos tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo comprendido, los ángulos opuestos á los lados iguales son también iguales.

La demostración del tercer caso de la igualdad de los triángulos se funda en el siguiente teorema.

Teorema 13.

30) *Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales y el ángulo comprendido es desigual, los otros lados serán desiguales y mayor el que se oponga al ángulo mayor*

(Figura 23.)



Sean A B C, A' B' C', los triángulos dados tales, que se tenga.

$$A > A',$$
$$b = b',$$
$$c = c',$$

probaremos entonces, que $a > a'$

Para demostrarlo, apliquemos el triángulo A' B' C' sobre el A B C, de modo que el lado c' coincida con el lado c, y sea A B C' su posición. Tracemos la bisectriz A D del ángulo C A C', y uniendo D con C' tendremos los triángulos A D C y A D C' que son iguales entre sí (29) y luego D C = D C'.

En la figura, tenemos,

$$B D + D C' = B D + D C = a,$$

además

$$B D + D C' > a',$$

$$\therefore \quad a > a'$$

OBSERVACIÓN.—Al aplicar el triángulo A' B' C' sobre el A B C, podrá suceder, que el punto C' caiga sobre el lado B C ó en el interior del triángulo, y para cada una de estas nuevas posiciones, la demostración del teorema es la misma, precedente.

31) COROLARIO.—La recíproca del teorema precedente es verdadera: *Cuando dos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales y los terceros desiguales, los ángulos opuestos á estos lados, son desiguales, siendo mayor el opuesto á mayor lado.*

En efecto: en los triángulos A B C, A' B' C', el ángulo A no puede ser igual al ángulo A' porque se tendría (**12**), $a = a'$; tampoco podrá ser menor porque entonces sería $a < a'$, según el teorema precedente y luego será A > A'.

OBSERVACIÓN.—Tres casos pueden presentarse, que se excluyen mútuamente, en la consideración de dos triángulos A B C, A' B' C', que tienen dos lados respectivamente iguales, $b = b'$ y $c = c'$. Estos son, según los valores de los ángulos A, A',

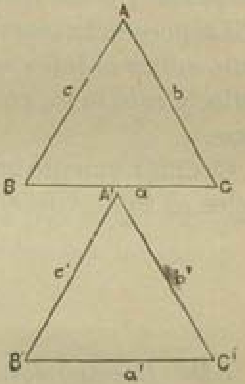
1.er caso A > A', y entonces el tercer lado $a > a'$;
2.º » A = A', » » » » $a = a'$;
3.º » A < A', » » » » $a < a'$;

Teorema 14.

32) *Dos triángulos son iguales, cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales.*

Sean los triángulos A B C, A' B' C' en los cuales se verifica que,

(Figura 24.)



$$a = a',$$

$$b = b',$$

$$c = c',$$

y digo que dos ángulos A, A', opuestos á dos lados a, a', son iguales.

En efecto, siendo los lados b, c, del triángulo AB C, respectivamente iguales á los lados b', c', del triángulo A' B' C', los lados a, a', no serán iguales sino en el caso en que los ángulos A, A', sean iguales. Pero es, $a = a'$, por hipótesis, luego el ángulo A será igual al ángulo A'. Los triángulos A B C, A' B' C', que tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente iguales, tendrán también, los ángulos opuestos á estos lados respectivamente iguales. (29)

Corolario.—Si dos triángulos tienen sus tres lados respectivamente iguales, los ángulos opuestos á estos lados serán también iguales.

Propiedades del triángulo isósceles.

33) Definiciones:

Se llama triángulo *isósceles*, al que tiene dos de sus lados iguales.

Un triángulo *equilátero ó equiángulo*, es el que tiene sus tres lados ó sus tres ángulos iguales

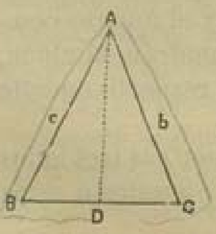
La perpendicular bajada de un vértice de un triángulo sobre el lado opuesto se llama *altura* del triángulo, y este lado, con respecto á la altura, se llama *base*.

Ordinariamente se llama base de un triángulo isósceles al lado diferente de los otros dos.

Teorema 15.

34) *Los ángulos opuestos á los dos lados iguales de un triángulo isósceles, son iguales.*

(Figura 25.)



Sea A B C un triángulo isósceles cuyos lados iguales son b y c; y demostremos que los ángulos B, C, opuestos á estos lados, son iguales entre sí.

En efecto, trazando la recta A D, que une el vértice A al punto D, medio de la base B C, divide esta recta al triángulo dado, en otros dos A B D y A C D iguales entre sí, pues tienen sus tres lados respectivamente iguales, que son: $b = c$, por hipótesis; A D común; B D = D C por construcción.

Siendo los triángulos A B D y A C D iguales entre sí, el ángulo B opuesto al lado A D en el primero es igual al ángulo C, opuesto al mismo lado A D en el otro triángulo.

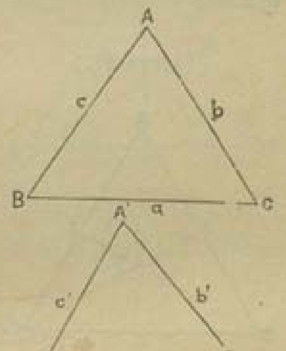
Corolario I.—De la igualdad de los triángulos A B D y A C D, se puede concluir también, la igualdad de los ángulos B A D y C A D, y la de los A D B y A D C, que son sus suplementos. Por consecuencia, la recta que une el vértice de un triángulo isósceles al punto medio de su base, es bisectriz del ángulo al vértice y perpendicular á la base.

Teorema 16.

35) *Cuando dos ángulos de un triángulo son iguales, los lados opuestos á estos ángulos son iguales y el triángulo es isósceles.*

Suponiendo que se tenga, en el triángulo A B C

(Figura 26.)



$$B = C,$$

demostraremos que

$$b = c.$$

Para esto, construyamos el triángulo A' B' C' idéntico al A B C, y dándolo vuelta, apliquémoslo, cara á cara, sobre el A B C de manera que el lado a' se aplique sobre el lado a, el ángulo C' sobre el ángulo B y el B' sobre el C. Entonces, el lado b' tomará la dirección del lado c, por ser B = C'; el lado c' la dirección del lado

b. por ser B' = C, y el punto A', común á los lados b', c', se aplicará sobre el punto A, que es común á los lados c, b. Resulta pues,

$$b' = c,$$

pues coinciden exactamente en la superposición de las figuras;

$$b' = b,$$

por construcción, luego

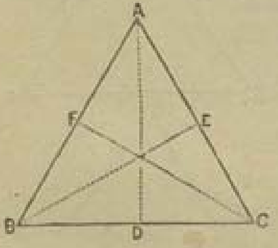
$$c = b$$

y el triángulo A B C es isósceles.

Teorema 17.

36) *Las medianas de un triángulo equilátero, son iguales.*

(Figura 27.)



Si el triángulo A B C es equilátero, será equiángulo y luego

$$A = B = C.$$

Trazando las medianas B E, C F, tendremos dos triángulos B E C, C F B, que son iguales, pués tienen el lado B C común; B F = C E por construcción y los ángulos comprendidos B = C. (29). Siendo estos triángulos iguales, darán

(1) $$B E = C F.$$

Trazando la mediana A D, tendremos los triángulos iguales A D C, A F C. por la misma razón, que darán

$$(^2) \qquad A D = C F,$$

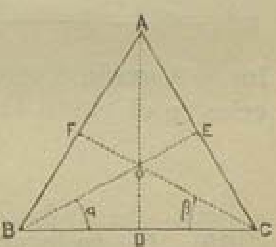
y comparando los (^{1}), (^{2}), resultará

$$B E = C F = A D.$$

Teorema 18.

37) *Las medianas de un triángulo isósceles, concurren en un punto.*

(Figura 28.)



Sea A B C el triángulo isósceles dado, A D la mediana que parte del vértice A (34). Tracemos las otras dos medianas B E, C F, y tendremos que los triángulos B E C, C F B, son iguales porque tienen los lados B F = C E por construcción; B C común y B = C por ser los ángulos en la base del triángulo isósceles. Siendo los triángulos B E C y C F B iguales, darán

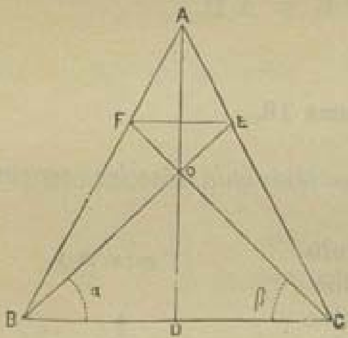
$$\text{ang } \alpha = \text{ang } \beta,$$

el triángulo B O C será isósceles y tendrá su vértice sobre la mediana A D.

Teorema 19.

38) *Si dos triángulos isósceles, tienen el ángulo al vértice común, y se trazan cruzadas las rectas que unan los otros vértices, estas se cortarán sobre la bisectriz del primero.*

(Figura 29.)



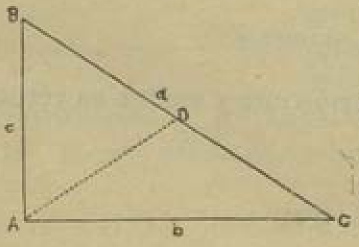
Sean A B C y A F E los dos triángulos isósceles dados. Tirando las rectas B E, C F, tendremos dos triángulos B E C, C F B, que son iguales porque tienen B C común; C E = B F, y los ángulos B = C.

Siendo los triángulos B E C, C F B, iguales tendremos que los ángulos α, β, serán iguales; el triángulo B O C será isósceles, y el punto O estará sobre la mediana A D.

Teorema 20.

39) *De dos lados de un triángulo, opuestos á ángulos desiguales, será mayor el opuesto á mayor ángulo.*

(Figura 30.)



Sea A B C un triángulo tal, que

$$A > C$$

y demostremos que entre los lados opuestos á estos ángulos, se verifica que

$$a > c$$

Para esto, formemos con el lado b y á partir de A, un ángulo C A D = C. El triángulo A D C, que tiene dos ángulos iguales, tendrá los lados opuestos á estos ángulos iguales entre sí (29), es decir,

$$AD = DC.$$

Pero en el triángulo A B D, se tiene

$$BD + AD > c,$$

y luego

$$BD + DC > c$$

ó lo que es lo mismo

$$a > c.$$

38 bis) En resúmen, de los teoremas 15 y 19 resulta que en un triángulo A B C,

Si	$B = C$	se	tendrá	$b = c.$
»	$B > C$	»	»	$b > c.$
»	$B < C$	»	»	$b < c.$

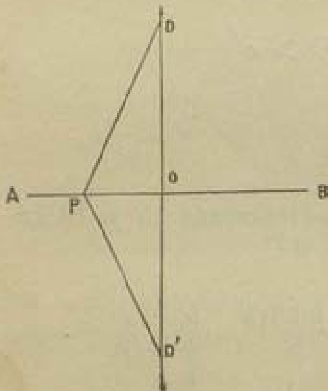
Corolario.—Los teoremas precedentes demuestran que: dos lados de un triángulo son iguales ó desiguales cuando los ángulos opuestos á estos lados son iguales ó desiguales, y que en el caso de desigualdad, el mayor lado se opone siempre al mayor ángulo.

Perpendiculares y oblícuas á una recta.

Teorema 21.

39) *De un punto dado fuera de una línea recta, se puede siempre bajar una perpendicular á esta recta.*

(Figura 31)



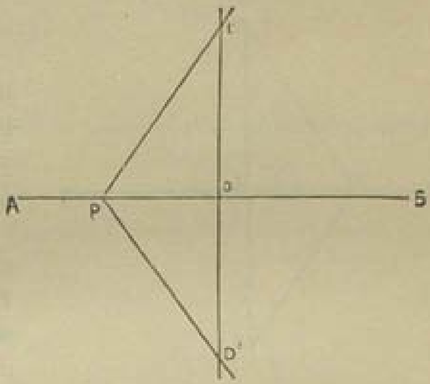
Del punto D, fuera de la recta A B, tracemos una recta cualquiera D P; en el punto P, donde encuentra á la recta A B, formemos el ángulo BPD' = BPD, trazando la recta P D'; sobre esta recta tomemos PD' = PD y uniendo los puntos D, D', tendremos dos triángulos D' O P, D O P, que son iguales por tener: por construcción el lado P D' = P D; común el el lado P O, é iguales los ángulos comprendidos por dichos lados. De la igualdad de estos triángulos se deduce la igualdad de los ángulos A O D' = A O D. Luego, la recta A B, que forma con la D D' dos ángulos adyacentes iguales y suplementarios, le será perpendicular, y recíprocamente, la recta D D' será perpendicular á la A B.

Teorema 22.

40) *De un punto dado fuera de una recta, sólo puede bajarse una perpendicular sobre esta recta.*

Sea D O una perpendicular á la recta A B. Prolongando la recta D O; tomando en su prolongación O D' = O D, y uniendo por rectas un punto cualquiera P de la A B, á los puntos D, D', formaremos dos triángulos D' O P, D O P, que son iguales por tener un ángulo igual comprendido por lados respectivamente iguales. Los ángulos D' P O = D P O no pueden ser rectos, pues si lo fueran, los lados D P y D' P estarían en línea recta y existirían dos rectas que se cortan en sólo dos puntos, D, D' lo que es absurdo. Luego, toda recta D P diferente de la D O, se á oblícua respecto á la recta A B.

(Figura 32.)



Teorema 23.

41) *Si de un punto dado fuera de una recta, se baja sobre ella, una perpendicular y diferentes oblícuas;*

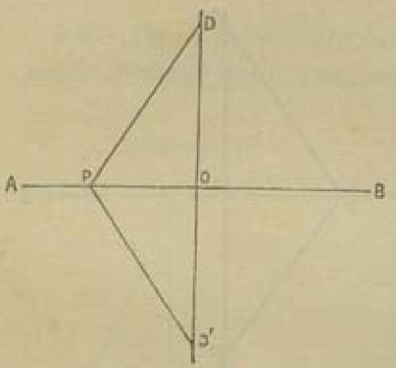
1.º *La perpendicular es más corta que cualquiera oblícua;*

2.º *Las oblícuas cuyos piés equidistan del pié de la perpendicular, son iguales;*

3.º *De dos oblícuas cuyos piés distan desigualmente del pié de la perpendicular, es mayor aquella en que esta distancia es mayor.*

1.° Trazando del punto D, la perpendicular D O y la oblícua D P, sobre la recta A se tendrá:

(Figura 33.)



$$DO < DP$$

En efecto, prolonguemos la recta D O; tomemos en su prolongación OD' = DO, y tracemos la recta D' P.

Tenemos así formados, dos triángulos D' O P, D O P, que son iguales por tener dos lados respectivamente iguales, é igual el ángulo comprendido. De aquí resulta

$$DP = D'P,$$

y como

$$DD' < DP + PD'$$

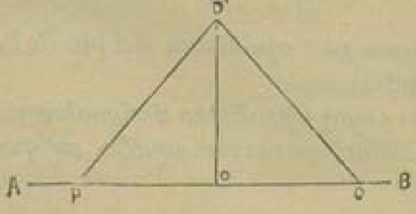
que puede escribirse

$$2\,DO < 2\,DP$$

$$\therefore \quad DO < DP.$$

2.° A partir del pié O de la perpendicular D O á la recta A B, tomemos sobre esta

(Figura 34.)



$$OQ = OP,$$

y trazando las oblícuas Q D, P D, demostraremos que,

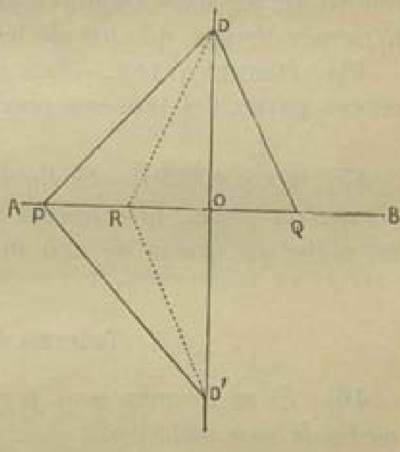
$$QD = PD.$$

En efecto, los triángulos D O P, D O Q, son iguales, por tener un ángulo recto formado por lados respectivamente iguales, y por consiguiente

$$QD = PD.$$

3.° A partir del pié O, de la perpendicular D O á la recta A B, tomemos sobre esta

(Figura 35.)



$$OQ < OP,$$

y trazando las rectas Q D, P D, demostraremos que

$$QD < PD.$$

Para demostrarlo, tomemos sobre O P una long. $OR = OQ$, y trazando la oblicua R D será

$$QD = RD,$$

porque sus piés están equidistantes del pié de la perpendicular.

Prolongando enseguida la recta D O, y tomando sobre la prolongación $OD' = OD$; y trazando las rectas R D', P D', tendremos que por ser R un punto interior al triángulo P D D' (25)

$$RD + RD' = 2RD < PD + PD' = 2PD,$$

y como $RD = QD$, será

$$QD < PD.$$

42) Corolario I.—*La distancia de un punto á una recta está dada por la longitud de la perpendicular bajada del punto á la recta,* puesto que ella es la más corta que puede trazarse del punto á la recta dada.

43) Corolario II.—*De un punto dado, no puede trazarse sobre una recta más de dos oblícuas iguales entre sí,* pués una tercera que parta del mismo punto, tendrá su pié más alejado ó más cercano del pié de la perpendicular, que los de las dos primeras.

44) Observación.—Las recíprocas de las diferentes partes del teorema precedente son ciertas.

45) Definición.—*Se llama lugar geométrico, en Geometria plana, al conjunto de todos los puntos de un plano que gozan de una misma propiedad.*

Teorema 24.

46) *Si se levanta una perpendicular en el punto medio de una recta dada:*

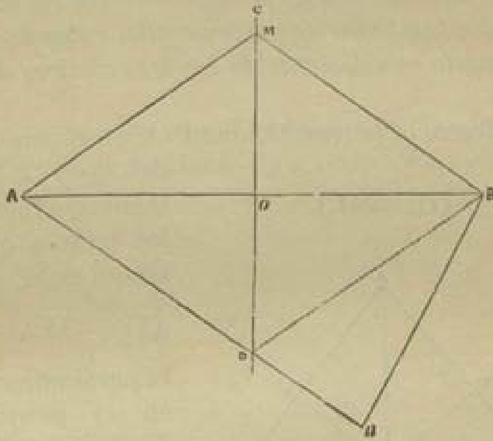
1.º *Todo punto de la perpendicular equidista de los extremos de la recta;*

2.º *Todo punto que se encuentre fuera de la perpendicular, dista desigualmente de los extremos de la recta.*

1.— Sea CD la recta perpendicular en el punto medio O, de la recta AB; unamos con los puntos A, B, un punto M, cualquiera de la recta CD. Las dos oblícuas MA, MB, cuyos piés equidistan del pié O, de la perpendicular serán iguales y el punto

M equidista de los puntos extremos A y B de la recta.

(Figura 36.)



2.° Sea N un punto tomado fuera de la perpendicular CD, y tracemos las rectas NA, NB. La recta NA encuentra á la perpendicular en un punto P, y si trazamos la recta PB, tendremos en el triángulo PNB,

$$NB < NP + PB,$$

pero

$$AP = PB,$$

luego

$$NB < NP + PA = NA;$$

y el punto N, dista desigualmente de los extremos A y B.

47) OBSERVACIÓN.—El teorema precedente puede enunciarse también, como sigue:

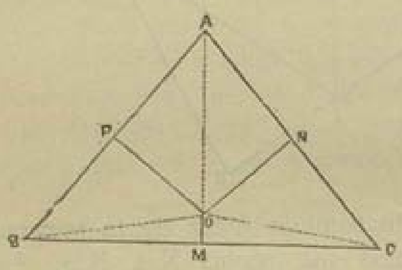
El lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos dados, es la perpendicular levantada en el punto medio de la recta que los une.

Teorema 25.

48) *Levantando perpendiculares por los puntos medios de los tres lados de un triángulo, estas se cortarán en un punto equidistante de los tres vértices del triángulo.*

En efecto, la perpendicular P O, en el punto medio del lado A B, es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de A, B, luego

(Figura 37.)



$$(^1) \qquad OA = OB;$$

la perpendicular N O, en el punto medio del lado A C, es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de A, C, luego

$$OA = OC;$$

y esta con la (¹) dan

$$OA = OB = OC.$$

Siendo $OB = OC$, la perpendicular levantada en el punto M, medio del lado B C, deberá pasar por el punto O.

49) Definición. — Se llama *triángulo rectángulo*, al que tiene un ángulo recto; el lado opuesto á este ángulo se llama *hipotenusa* y los otros dos lados, *catetos*.

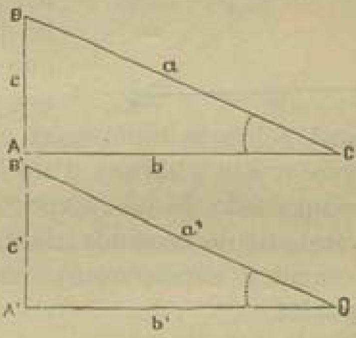
Igualdad de los triángulos rectángulos.

Teorema 26.

50) *Dos triángulos rectángulos son iguales, cuando tienen igual, la hipotenusa y un ángulo agudo.*

Sean A B C y A' B' C', dos triángulos rectángulos. Estos dos triángulos serán iguales, si tienen igual la hipotenusa $a = a'$, y un ángulo agudo $C = C'$.

(Figura 38)



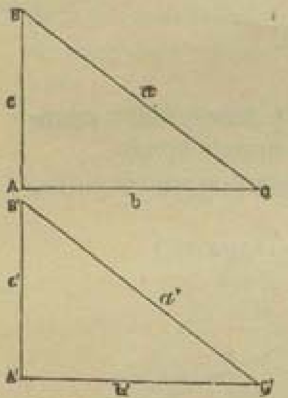
En efecto, trasportemos el triángulo A'B'C' sobre el AB C, de modo que la hipotenusa a' se aplique sobre la a, para lo cual haremos coincidir los puntos B', C', sobre los B, C. El lado b' tomará la dirección del lado b por la igualdad de los ángulos C y C', y el lado c' perpendicular al b', se aplicará sobre el lado c que es perpendicular al lado b. Por consiguiente, los triángulos A B C, A' B' C', que coinciden en toda su extensión, son iguales.

Teorema 27.

51) *Dos triángulos rectángulos son iguales, cuando tienen iguales, la hipotenusa y un cateto.*

Sean A B C, A' B' C', dos triángulos rectángulos. Estos triángulos serán iguales, si tienen igual la hipotenusa $a = a'$, y un cateto cualquiera, $c = c'$.

(Figura 39.)



En efecto, trasportemos el triángulo A' B' C' sobre el A B C, de modo que el cateto c' se aplique sobre el cateto c, para lo cual haremos coincidir los puntos A', B', sobre los A, B. El cateto b' tomará la dirección del cateto b porque los ángulos A, A' son rectos; y la hipotenusa a' se aplicará sobre la hipotenusa a porque esas dos líneas iguales son oblicuas á los lados b', b, y situados del mismo lado de las perpendiculares B A, B' A'. Por consiguiente esos dos triángulos A B C, A' B' C', que coinciden superpuestos, en toda su extensión, son iguales.

Teorema 28.

52) 1.° *Todo punto de la bisectriz de un ángulo equidista de sus lados.*

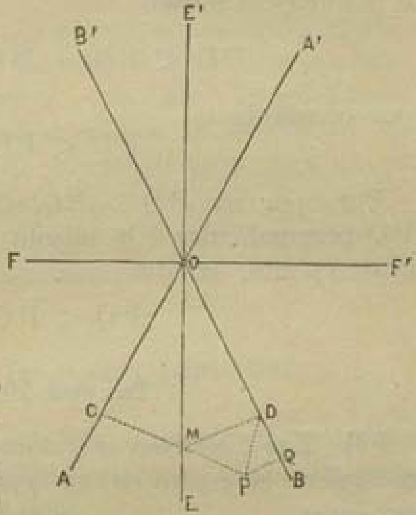
2.° *Todo punto tomado fuera de la bisectriz de un ángulo, no equidista de sus lados.*

1.°—Sea A O B el ángulo considerado; E E' su bisectriz. De un punto M, cualquiera, tracemos las perpendiculares M C, M D, sobre los lados O A, O B.

Los triángulos rectángulos M O C, M O D, son iguales, por tener común la hipotenusa, é iguales

los ángulos M O D, M O C, pues M O es la bisectriz del ángulo A O B;
luego

(Figura 10.)



$$M C = M D$$

y como M es un punto cualquiera de la recta se sigue: que la recta E E' es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados del ángulo A O B y de su opuesto por el vértice A' O B'.

Análogamente, la recta F F' bisectriz de los ángulos A O B' y B O A', es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de sus lados.

Por tanto, el lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos rectas indefinidas que se cortan, es el conjunto de las bisectrices de los ángulos formados por estas rectas. Estas bisectrices son perpendiculares entre sí (19).

2.° De un punto P, que no pertenezca á la bisectriz, tracemos las perpendiculares P Q y P C á los lados del ángulo A O B, una de estas, la P C encontrará á la bisectriz E E' en un punto M; del punto M, tracemos la perpendicular M D, á la recta B B' y unamos al punto P al D, por la recta P D.

Siendo M un punto de la bisectriz, tendremos

$$M C = M D.$$

pero en el triángulo PMD, es

$$PD < PM + MD$$

ó lo que es lo mismo

$$PD < PM + MC = PC$$

por consiguiente

$$PD < PC$$

Pero por ser $PD > PQ$, siendo PD oblícua y PQ perpendicular á la misma recta, trazadas de un mismo punto, resulta

$$PQ < PC$$

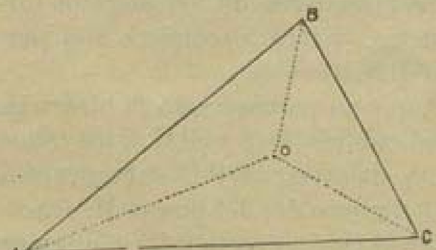
L. Q. D. D.

Teorema 29.

53) *Las bisectrices de los ángulos de un triángulo cualquiera, se cortan en un punto que equidista de sus lados.*

Trazando las bisectrices de los ángulos A y C del triángulo ABC, estas se cortarán en un punto O.

(Figura 41.)



Siendo O, un punto de la bisectriz AO equidista de los lados AC y AB; pero como también es un punto de la bisetriz CO, equidista de lados AC y CB, y luego, el punto O, equidistante de los tres lados del triángulo, pertenecerá también á la bisectriz del tercer ángulo B.

Vemos pués, que las tres bisectrices de los ángulos de un triángulo, concurren á un punto único que es á lo que se reduce el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los tres lados de un triángulo.

54) Corolario.—Como en el triángulo equilátero, las bisectrices de sus ángulos, que son también las medianas, coinciden con las perpediculares levantadas en los puntos medios de los lados, el punto de encuentro de aquellas, coincidirá en el punto de encuentro de estas.

Teoría de las rectas paralelas.

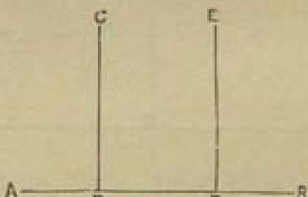
55) Definición.—Se llaman *rectas paralelas*, las que situadas en un mismo plano no se encuentran por más que se prolonguen.

Teorema 30.

56) *Dos rectas perpendiculares á una tercera, son paralelas entre sí.*

En efecto, siendo las líneas rectas C D, E F, perpendiculares á la A B, no podrán encontrarse, porque de un punto de un plano no puede trazarse dos perpendiculares á una misma recta. (10)

(Figura 42.)



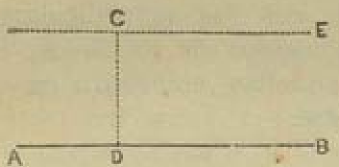
BIBLIOTECA DEL DOCENTE

Teorema 31.

57) *Por un punto situado fuera de una línea recta, puede siempre trazarse una paralela á esta recta.*

En efecto, siendo A B y C, una línea recta y un punto que se encuentran en un mismo plano, tracemos del punto C, una perpendicular C D sobre la recta, y por el mismo punto, una perpendicular á la C D. Las líneas rectas A B y C E serán paralelas por ser ambas perpendiculares á una misma recta C D (56).

(Figura 43.)



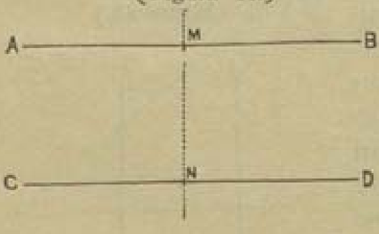
58) Axioma.—*De un punto dado, no puede trazarse más que una sola paralela á una recta dada. (Postulado de Euclides).*

59) Corolario.—Si dos rectas son paralelas, toda recta trazada en su plano, que encuentre á una de ellas encontrará á la otra.

Teorema 32.

60) *Si dos líneas rectas son paralelas, toda recta perpendicular á una de ellas, lo será á la otra.*

(Figura 44.)

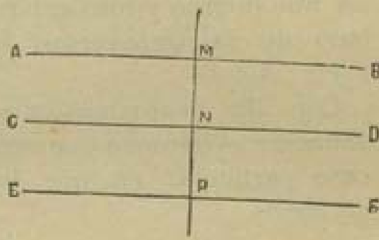


Sean A B y C D, dos rectas paralelas.

Por un punto M, cualquiera de la recta A B, tracemos una perpendicular á esta y en el punto N donde encuentra á la C D, tracemos una perpendicular á la MN la cual coincidirá con la CD pues por hipótesis esta es paralela á AB. Luego, la recta MN perpendicular á la recta AB, lo es también á su paralela CD.

61) Corolario. — *Dos rectas* AB, CD *paralelas á una tercera* EF, *son paralelas entre sí.*

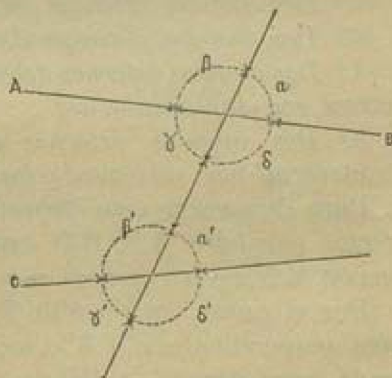
(Figura 45.)



Pues si la recta MNP es perpendicular á la recta EF, lo será también á las CD y AB que le son paralelas, y luego AB y CD serán paralelas entre sí.

62) Definición.— Cuando dos líneas rectas AB, CD, situadas en un plano, se cortan por una transversal MN, se forman alrededor de cada punto de encuentro cuatro ángulos, en general dos agudos y dos obtusos respectivamente iguales entre si, por opuestos por el vértice. Así, $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$; $\alpha' = \gamma'$, $\beta' = \delta'$.

(Figura 46.)



Se ha convenido en dar á estos ocho ángulos considerados entre sí, los nombres siguientes:

Internos á los cuatro ángulos que resultan entre las rectas AB, CD, y externos á los otros cuatro;

Alternos internos á los ángulos internos no adyacentes, de uno y otro lado de la transversal M N; tales son los α' y γ, β' y δ;

Alternos externos á los ángulos externos no adyacentes, de uno y otro lado de la transversal, tales son los α y γ'; β y δ'.

Correspondientes á dos ángulos no adyacentes, uno interno y otro externo, colocados del mismo lado de la transversal, tales son α y α', β y β', γ y γ', δ y δ'.

Con las denominaciones precedentes, podemos enunciar el teorema que sigue, el cual se refiere al caso particular en que las rectas A B y C D son paralelas.

Teorema 33.

63) *Cuando dos rectas paralelas se cortan por una transversal cualquiera, se verifica:*

1.° *Dos ángulos alternos internos son iguales;*

2.° *Dos ángulos alternos externos son iguales;*

3.° *Dos ángulos correspondientes son iguales;*

4.° *Dos ángulos internos del mismo lado de la transversal son suplementarios;*

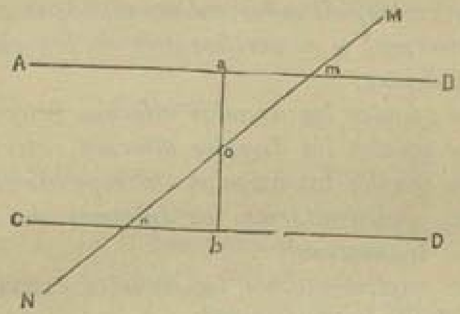
5.° *Dos ángulos externos del mismo lado de la transversal son suplementarios.*

Para demostrar este teorema, consideremos dos rectas paralelas A B, C D, cortadas por una transversal M N, en los puntos *m* y *n*.

Por el punto medio *o* de la recta *m n*, tracemos una perpendicular *o a* á la recta A B, la cual prolongada, encontrará á la CD en el punto *b*, siendo también perpendicular á esta recta. De este modo, habremos formado dos triángulos rectángulos *o a m*, *o b n*, que son iguales, pues tienen igual la hipotenusa

$o\,m = o\,n$, por construcción, é iguales los ángulos en el punto o por opuestos por el vértice. De la igual-

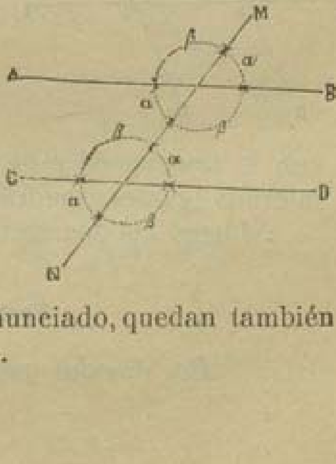
(Figura 47.)



dad de estos triángulos se deduce la igualdad de los ángulos alternos-internos $a\,m\,o = b\,n\,o$. Los otros dos ángulos alternos-internos $B\,m\,o$ y $C\,n\,o$ son también iguales por suplementos de los anteriores.

Construyamos la figura, designando con la misma letra los ángulos iguales, y recordando que los ángulos opuestos por el vértice son iguales y que los ángulos adyacentes son suplementarios, tendríamos:

(Figura 48.)



La simple inspección de la figura nos dice: que son iguales entre sí, los cuatro ángulos agudos, lo mismo que los cuatro ángulos obtusos y que satisfecha una de las *cinco* condiciones del enunciado, quedan también satifechas las otras cuatro.

Teorema 34.

64) El teorema recíproco del precedente, se anuncia así:

Si dos rectas, situados en un plano, se cortan por una transversal y se verifica una de las cinco condiciones siguientes:

1.° *Ser iguales los ángulos alternos internos;*

2.° *Ser iguales los ángulos alternos externos;*

3.° *Ser iguales los ángulos correspondientes;*

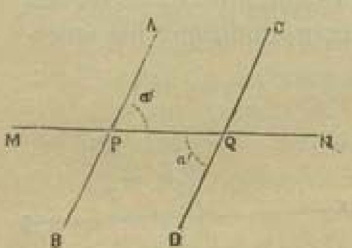
4.° *Ser suplementarios los internos de un mismo lado de la transversal;*

5.° *Ser suplementarios los ángulos externos de un mismo lado de la transversal;*

Las otras cuatro quedarán satisfechas y las dos rectas serán paralelas entre sí.

Para demostrarlo, consideremos dos rectas A B, C D, cortados por la transversal M N en los puntos P, Q. Supongamos que los ángulos *alternos-internos* sean iguales $\alpha=\alpha'$, y tracemos por el punto Q, una paralela á la recta A B; como esta recta, que tratamos de trazar, debe formar con la transversal y la recta A B, ángulos alternos-internos iguales, tendrá que coincidir con la recta . Luego las dos rectas A B, C D, son paralelas.

(Figura 49.)



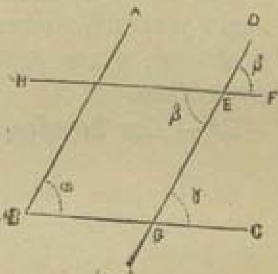
Teorema 35.

Dos ángulos que tienen sus lados espectiva-

mente paralelos, son iguales, cuando cada lado de uno está dirigido en el mismo sentido ó en sentido contrario de cada lado del otro. Estos ángulos serán suplementarios, cuando dos de sus lados tienen la misma dirección y los otros dos, dirección contraria.

1.° — Los ángulos

(Figura 50.)



$$DEF = HEG = \beta,$$

y $$ABC = \alpha$$

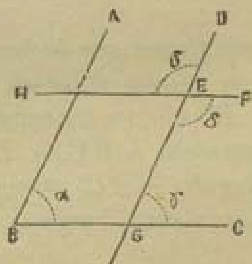
que tienen sus lados paralelos y dirigidos, los dos, en el mismo sentido ó en sentido contrario, son iguales.

En efecto, se tiene en la figura, $\alpha = \gamma$, por *correspondientes* entre las paralelas A B, D G, cortadas por la transversal B C; pero $\gamma = \beta$, por *alternos-internos* ó por *correspondientes* entre las paralelas H F, B C, cortadas por la transversal D G, luego

$$\alpha = \beta$$

2.° — Los ángulos

(Figura 51.)



$$GEF = HED = \delta$$

y $$ABC = \alpha,$$

que tienen respectivamente dos de sus lados en la misma dirección y los otros dos en dirección contraria, son suplementarios.

En efecto, tenemos $\alpha = \gamma$, por *correspondientes*;

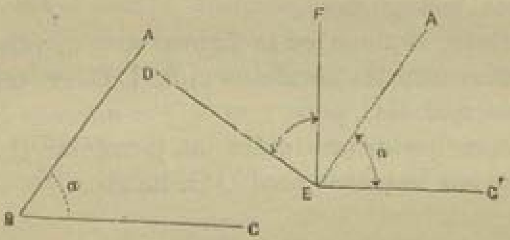
γ suplemento de δ, por *internos* de un mismo lado de la transversal D G, luego α es suplemento de δ.

Teorema 36.

66) *Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son iguales, si los dos son agudos ú obtusos, y son suplementarios, si uno es agudo y el otro obtuso.*

1.° — *Los ángulos, de la misma especie,*

(Figura 52.)



$$A B C = \alpha,$$
$$D E F = \beta,$$

que tienen sus lados respectivamente perpendiculares, son iguales entre sí.

En efecto, tracemos por el punto E, las rectas E C' paralela á B C, y E A' paralela á B A, entonces el ángulo A' E C' = α; pero los ángulos D E A' y F E C' son rectos, luego

$$\alpha = \beta,$$

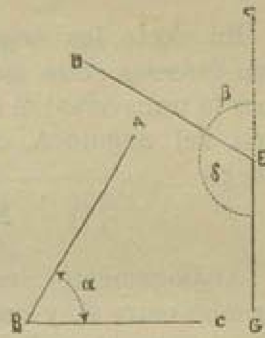
por ser complementos de un mismo ángulo F E A'.

2.º — *Los ángulos*

(Figura 53.)

$$ABC = \alpha,$$

$$DEG = \delta,$$



que tienen sus lados respectivamente perpendiculares, siendo uno de estos ángulos agudo y el otro obtuso, son suplementarios.

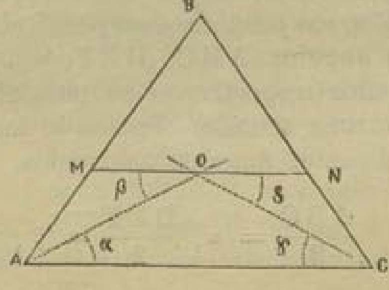
En efecto, prolongando el lado G E en E F, tendremos el ángulo β que es suplemento del δ, pero hemos visto que $\alpha = \beta$, luego el ángulo α es suplemento del ángulo δ.

Teorema 37.

67) *La paralela á un lado de un triángulo cualquiera, tirada por el punto de encuentro de las bisectrices, es igual á la suma de los segmentos adyacentes á este lado, que aquella determina sobre los otros dos*

Considerando el triángulo A B C, tiremos, por el

(Figura 54.)



punto O, de encuentro de los bisectrices, la recta

MN paralela al lado AC y demostraremos que,

$$MN = AM + NC.$$

En efecto, los ángulos α, β, son iguales por *alternos-internos* entre las paralelas MN y AC, cortadas por la transversal AO, y como esta última es bisectriz del ángulo A, el triángulo AMO es isósceles, luego

$$(^1) \qquad MO = AM.$$

Análogamente veremos, que los ángulos γ, δ, son iguales entre sí, y como CO es bisectriz del ángulo C, el triángulo CNO es isósceles, luego

$$(^2) \qquad ON = NC$$

Sumando los $(^1)$ y $(^2)$ resulta

$$MO + ON = MN = AM + NC.$$

L. Q. D. D.

Teorema 38.

68) *Las bisectrices de dos ángulos que tienen sus lados paralelos, son paralelas ó perpendiculares entre sí.*

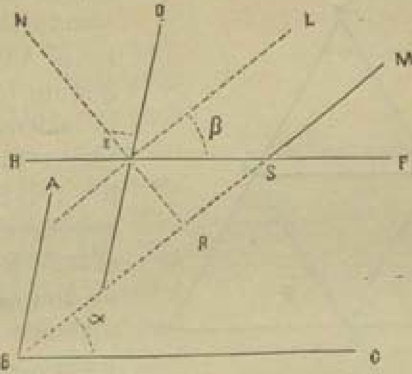
1.º—Los ángulos ABC, DEF, son iguales por tener sus lados respectivamente paralelos y dirigidos en el mismo sentido. Trazando las bisectrices BM, EL, de estos ángulos tendremos,

$$\frac{ABC}{2} = \alpha, \ \frac{DEF}{2} = \beta,$$

y también $\alpha = \beta$.

Prolonguemos la bisectriz B M, que formará con E F el ángulo M S F $= \alpha$, por *correspondientes*, pero

(Figura 55.)



$\alpha = \beta$, luego las bisectrices B M E L son paralelas entre sí, pues forman ángulos *correspondientes* iguales.

2.º Los ángulos A B C, D E H, son suplementarios; la bisectriz N R es perpendicular á la E L (19), siéndolo también á su paralela B M (59).

OBSERVACIÓN.—Lo mismo sucede con respecto á las bisectrices de dos ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares.

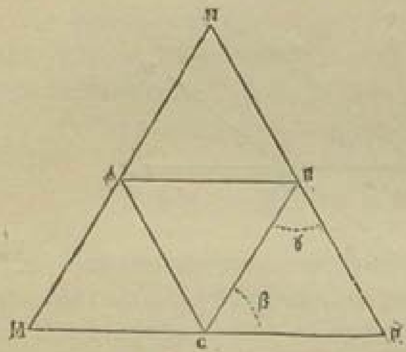
Teorema 39.

69) *Si por los vértices de un triángulo cualquiera, se trazan paralelas á los lados opuestos, se formará un triángulo cuádruple del propuesto.*

En efecto, siendo A B C el triángulo propuesto, tracemos por sus vértices paralelas á los lados opuestos, las cuales, cortándose dos á dos, forman un triángulo M N P.

Siendo CP paralela al lado AB, por construcción, será el ángulo B = β, por *alternos-internos;* y siendo BP paralela á AC, será el ángulo C = γ por la misma razón; luego los triángulos CBP y ABC que tienen común el lado BC é iguales los ángulos adyacentes, son iguales entre sí. De una manera análoga demostraremos que los triángulos ANB y MAC son iguales al ABC, por consiguiente

(Figura 56.)



$$MNP = ABC + CBP + BNA + AMC = 4ABC$$

y el triángulo MNP será cuádruplo del propuesto ABC.

Teorema 40.

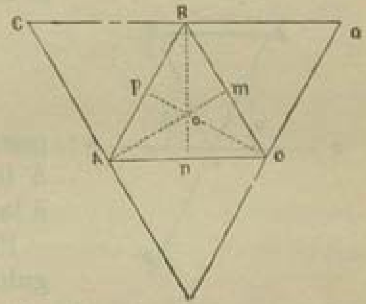
70) *Las perpendiculares trazadas desde los vértices de un triángulo cualquiera, sobre los lados opuestos, concurren en un punto.*

Por los vértices A, B, C, del triángulo dado, tracemos paralelas á los lados opuestos, formando así el triángulo *abc*. Los triángulos parciales

B C a, C A b, A B c, son iguales al triángulo A B C (30) y dan

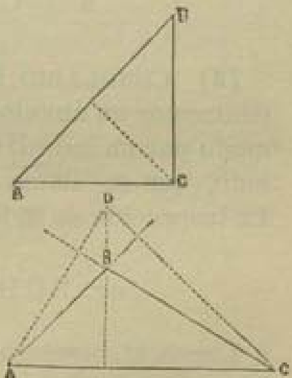
$$AB = bC = Ca,\ BC = cA = Ab,\ CA = cB = Ba,$$

(Figura 57.)



y los puntos medios de los lados del triángulo $a\,b\,c$, son los vértices A, B, C, del triángulo propuesto. Pero las perpendiculares A m, B n, C p, trazadas de los vértices A, B, C, sobre los lados opuestos serán las perpendiculares tiradas de los puntos medios de los lados del triángulo $a\,b\,c$ que se cortan, como sabemos, en un punto. Luego las perpendiculares trazadas de los vértices del triángulo sobre sus lados opuestos, se cortan en un punto o.

(Figura 58.)



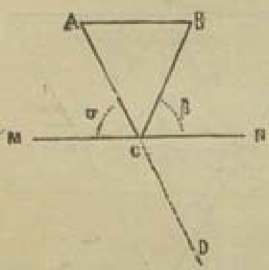
Escolio. — Cuando el triángulo dado es acutángulo, las perpendiculares se encuentran en un punto interior; cuando el triángulo es rectángulo, se encuentran sobre el vértice del ángulo recto; y cuando el triángulo es obtusángulo se encuentran en un punto D exterior al triángulo.

Teorema 41.

71) *La suma de los tres ángulos de un triángulo cualquiera, es igual á dos rectos.*

Por un vértice cualquiera C, del triángulo ABC, tracemos una paralela MN al lado opuesto y tendremos

(Figura 59.)



$$A = \alpha, \quad B = \beta,$$

por alternos-internos respecto á las paralelas AB, MN, y á las transversales AC, BC.

Pero la suma de los ángulos formados en un punto de un mismo lado de una recta, vale dos ángulos rectos, entonces

$$\alpha + C + \beta = 2 \text{ rectos},$$

y luego

$$A + C + B = 2 \text{ rectos},$$

72) Corolario I—Prolongando el lado AB, tendremos un ángulo BCD, es decir, un ángulo formado por un lado BC y la prolongación CD de otro lado, que se llama ángulo *exterior* al triángulo. La inspección de la figura anterior, dice que

$$\text{áng. } BCD = \alpha + \beta = A + B.$$

Luego, *el ángulo exterior á un triángulo, es igual á la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes.*

73) Corolario II.—Un triángulo no puede

tener más que un solo ángulo obtuso ó recto y los otros dos agudos. Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.

74) Corolario III. — Cada ángulo de un triángulo equilátero es igual á los $\frac{2}{3}$ de un ángulo recto.

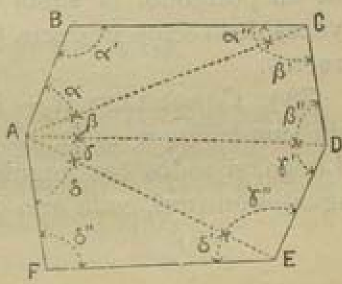
75) Corolario IV. — Si dos ángulos de un triángulo son iguales respectivamente á dos ángulos de otro triángulo, los otros dos ángulos serán iguales entre sí, por suplementos de sumas iguales.

Teorema 42.

76) *La suma de los ángulos de un polígono convexo, es igual á tantas veces dos ángulos rectos como lados tiene menos dos.*

Siendo ABCDEF, el polígono dado, tracemos por el vértice A las diagonales á todos los vértices, escepto á los B y F que aquí están ligados al A por los lados AB, AF. De este modo tendremos descompuesto el polígono en tantos triángulos como lados tiene menos dos. Pero la suma de los ángulos del polígono es igual á la suma de los ángulos de todos los triángulos, luego será igual á tantas veces dos rectos como sea el número de triángulos, ó igual á tantas veces dos rectos como lados tiene menos dos.

(Figura 60.)



De otro modo — La suma de los ángulos de cada uno de los triángulos componentes A B C, A C D, A D E, A E F, es,

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' = 2 \text{ rectos},$$
$$\beta + \beta' + \beta'' = 2 \text{ rectos},$$
$$\gamma + \gamma' + \gamma'' = 2 \text{ rectos},$$
$$\delta + \delta' + \delta'' = 2 \text{ rectos},$$

y sumando estas igualdades, miembro á miembro, resulta

$$(\alpha + \beta + \gamma + \delta) + \alpha' + (\alpha'' + \beta') + (\beta'' + \gamma') + (\gamma'' + \delta') + \delta'' = 4 \times 2 \text{ rts.}$$

ó bién

$$A + B + C + D + E + F = (6 - 2) \times 2 \text{ rts.}$$

L. Q. D D.

77) Corolario I. — Siendo n el número de lados de un polígono, la suma de sus ángulos será $n - 2$ veces dos rectos, es decir, $(n - 2) \times 2$ rts. $= (2n - 4)$ rectos.

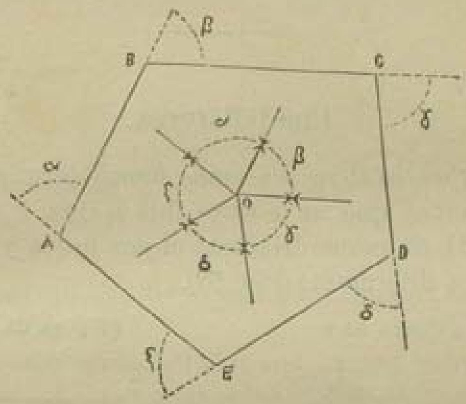
78) Corolario II. — La suma de los ángulos de un cuadrilátero es igual á cuatro ángulos rectos. Luego, si todos los ángulos de un cuadrilátero son iguales entre sí, cada uno de ellos será recto.

Teorema 43.

79) *La suma de los ángulos exteriores de un polígono convexo, es igual á cuatro ángulos rectos.*

Siendo A B C D E el polígono dado; prolonguemos sus lados en un mismo sentido formando así los ángulos exteriores del polígono. Tomando un punto interior *o* y tirando por este, paralelas á las

(Figura 61).



prolongaciones de los lados del polígono, formaremos alrededor de este punto, todos los ángulos exteriores cuya suma será

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \xi = 4 \text{ rts.}$$

Luego la suma de los ángulos exteriores del polígono convexo, es igual á cuatro ángulos rectos.

80) Corolario.—Un polígono convexo no tiene más de tres ángulos interiores agudos, pues él no tiene más de tres ángulos exteriores obtusos.

81) Se llama polígono *equilátero* el que tiene todos sus lados iguales, y polígono *equiángulo* al que tiene sus ángulos iguales.

82) Se dá el nombre de polígono *regular* al que tiene sus lados y ángulos iguales, es decir, al que es á la vez equilátero y equiángulo.

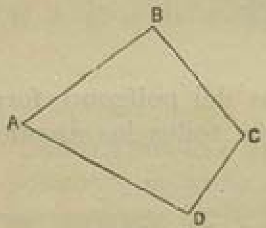
Dos polígonos son *equiángulos entre sí*, cuando todos los ángulos del primero son respectivamente iguales á sus *homólogos* en el segundo.

Cuadriláteros.

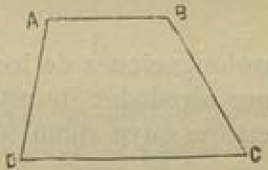
83) *Cuadrilátero* es una figura terminada por cuatro rectas que se cortan dos á dos.

A B C D es un cuadrilátero cuyos lados y ángulos son todos diferentes. (Fig. 62).

(Figura 62.)

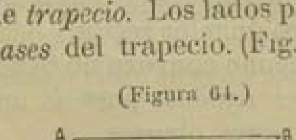


(Figura 63.)

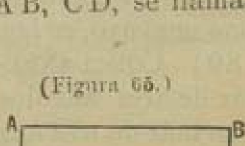


Si los lados son diferentes pero dos de ellos son paralelos entre sí, el cuadrilátero toma el nombre de *trapecio*. Los lados paralelos A B, C D, se llaman *bases* del trapecio. (Fig. 63).

(Figura 64.)



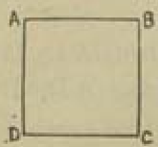
(Figura 65.)



Si los lados opuestos de un cuadrilátero son paralelos dos á dos toma el nombre de *paralelogramo ó romboide.* (Fig. 64.)

El paralelogramo cuyos ángulos son rectos, se llama *rectángulo.* (Fig 65.)

(Figura 66.)



(Figura 67.)

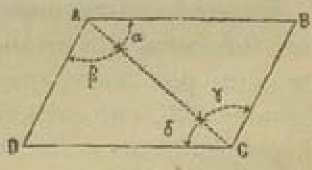
El rectángulo que tiene sus lados iguales, se llama *cuadrado.* (Fig. 66.)

Si el paralelogramo tiene sus cuatro lados iguales pero no rectos sus ángulos, toma el nombre de *rombo ó losange.* (Fig. 67.)

Teorema 44.

84) *Los lados opuestos de un paralelogramo son iguales así como los ángulos opuestos.*

(Figura 68.)



Trazando la diagonal A C del paralelogramo A B C D, lo tendremos dividido en dos triángulos A B C, A C D que son iguales por tener el lado A C común y los ángulos

$$\alpha = \delta,$$
$$\beta = \gamma,$$

por alternos-internos entre los lados paralelos de la figura y la transversal A C.

Luego el lado A B opuesto al ángulo γ es igual al lado D C opuesto al ángulo β; el lado B C opuesto al ángulo α, es igual al lado A C opuesto al ángulo δ.

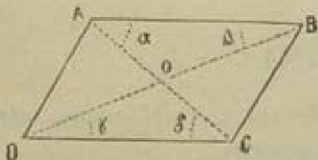
De la igualdad de los triángulos A B C, A C D, resulta que el ángulo en B es igual al ángulo en D por que se oponen al mismo lado A B, y los ángulos en A y C son también iguales entre sí, por ser $\alpha + \beta = \gamma + \delta$.

85) Corolario I.—*Las paralelas* A B, D C, *comprendidas entre dos rectas paralelas* A D, B C, *son iguales.*

Teorema 45.

86) *Un cuadrilátero cuyos lados ó ángulos opuestos son iguales, es un paralelogramo*

(Figura 69.)



1.°—Si en el cuadrilátero A B C D, se verifica, que

$$AB = DC,$$

$$AD = BC,$$

los lados opuestos de este cuadrilátero serán paralelos.

En efecto, tracemos la diagonal A C, teniendo así formados dos triángulos A B C, A C D, que son iguales por tener sus tres lados respectivamente iguales (32), entonces el ángulo α es igual al ángulo δ, por opuestos á los lados A D = B C; pero estos ángulos son alterno-internos respecto á las rectas A B, D C, cortadas por la transversal A C, y luego estas rectas serán paralelas entre sí (64). Análogamente probaríamos que A D y B C son paralelas.

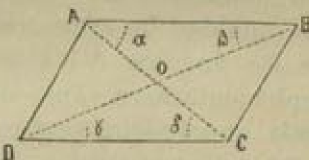
2.° El cuadrilátero A B C D cuyos ángulos opuestos son iguales, es un paralelogramo.

En efecto, por hipótesis, la suma de dos ángulos consecutivos, en A y en B, es igual á la mitad de la suma de los ángulos del cuadrilátero, es decir, igual á dos ángulos rectos. Pero estos ángulos son internos respecto á las dos líneas A D, B C, y situados del mismo lado de la transversal A B, luego las rectas A D y B C son paralelas (63). Análogamente demostraríamos que A B es paralela á D C.

Teorema 46.

87) *Las diagonales de un paralelogramo se cortan mutuamente en partes iguales.*

(Figura 70.)



Sea A B C D el paralelogramo y O el punto de intersección de sus dos diagonales. Los triángulos A O B, D O C, son iguales por tener: AB = C D, por lados opuestos del paralelogramo; los ángulos $\alpha = \delta$ y $\gamma = \beta$ por alternos-internos entre las paralelas A B, D C, cortadas por las transversales A C y D B, y luego

$$A\,O = O\,C,$$
$$D\,O = O\,B.$$

L. Q. D. D

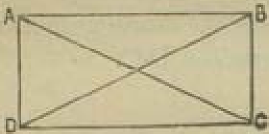
88) COROLARIO. — *Si en un cuadrilátero, las diagonales se cortan mutuamente en partes iguales, la figura es un paralelogramo.*

Teorema 47.

89) *Las diagonales de un rectángulo son iguales.*

En efecto, los triángulos A B C y B C D son iguales por tener dos lados iguales respectivamente é igual el ángulo comprendido, á saber: los ángulos en D y en C iguales por rectos, el lado D C común y los lados A D, B C, iguales por ser lados opuestos de un paralelogramo. Por consiguiente las diagonales A C y D B, que son los otros lados de estos triángulos serán iguales entre sí.

(Figura 71.)



90) Recíprocamente, *si en un paralelogramo, las diagonales son iguales, la figura es un rectángulo.* En efecto, los dos triángulos A D C, B C D, son iguales, por tener sus tres lados respectivamente iguales. La igualdad de estos triángulos nos dá la igualdad de los ángulos A D C y B C D, y como estos son suplementarios á causa del paralelismo de AD y BC, cada uno de ellos será recto.

91) Corolario.—*Si en un cuadrilátero, las diagonales se cortan mutuamente en partes iguales, y estas partes son iguales entre sí, la figura es un rectángulo.*

Teorema 43.

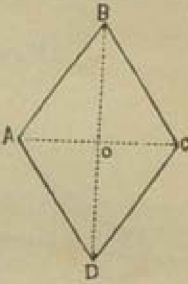
92) *Las diagonales de un rombo son perpendiculares entre s'.*

En efecto, siendo

$$AB = BC,$$

el punto B pertenecerá á la perpendicular, trazada en en el punto medio de A C. Por otra parte, siendo

(Figura 72.)



$$A D = D C,$$

el punto D pertenecerá también á la misma perpendicular, que se confundirá por consecuencia con la diagonal B D.

Recíprocamente, *si en un paralelogramo, las diagonales son perpendiculares entre sí, la figura es un rombo.* Pues siendo la figura un paralelogramo, tendremos O D = O B y luego A D = A B.

93) Corolario. — *Si en un cuadrilátero, las diagonales se cortan mutuamente en partes iguales y son perpendiculares entre sí, la figura es un rombo.*

Teorema 49.

94) *Las diagonales de un cuadrado son á la vez iguales entre sí y perpendiculares.*

Esto resulta de que un cuadrado es á la vez un rectángulo y un rombo.

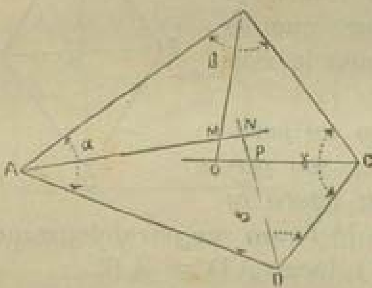
Recíprocamente, *si en un paralelogramo, las diagonales son á la vez iguales y perpendiculares entre sí, la figura es un cuadrado.*

95) Corolario. — *Si en un cuadrilátero, sus diagonales son iguales, se cortan en partes iguales y son perpendiculares entre sí, este cuadrilátero es un cuadrado.*

Teorema 50.

96) *Las bisectrices de los ángulos de un cuadrilátero, se cortan formando un segundo cuadrilátero cuyos ángulos opuestos son suplementarios; cuando el cuadrilátero propuesto es un paralelogramo, el segundo es un rectángulo.*

(Figura 73.)



1.º — Las bisectrices de los ángulos de un cuadrilátero cualquiera A B C D, se cortan formando el segundo cuadrilátero M N P Q, y llamando α, β, γ, δ, á los ángulos del primero, tendremos en los triángulos C Q B y A N D.

$$\text{áng. } PQM = 2 \text{ rts.} - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2},$$

$$\text{áng. } MNP = 2 \text{ rts.} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\delta}{2},$$

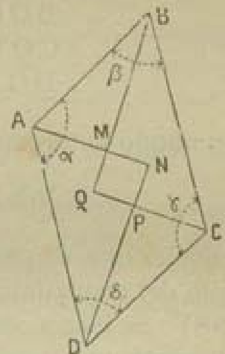
Sumando las anteriores igualdades, tendremos

$$\text{áng. } PQM + \text{áng. } MNP = 4 \text{ rts.} - \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2} = 2 \text{ rts.}$$

pués la suma $\frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2}$ de los ángulos interiores del cuadrilátero, es igual á 2 rectos.

2.° Si la figura A B C D es un paralelogramo, dos de sus ángulos sucesivos son suplementarios, de modo que

(Figura 74.)



$\alpha + \beta = 2$ rts., $\gamma + \delta = 2$ rts.

Pero

áng. $NMB = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 1$ rto.

áng. $QPD = \frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2} = 1$ rto.

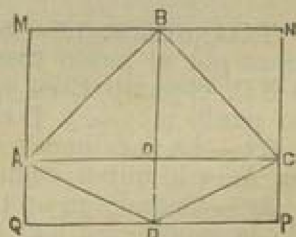
luego, los ángulos N M Q, N P Q, que son suplementos de los anteriores, valdrán 1 recto y la figura M N P Q será un rectángulo.

Teorema 51.

97) *Si por las extremidades de cada diagonal de un cuadrilátero cualquiera, se trazan paralelas á la otra, se formará un paralelogramo equivalente al doble del cuadrilátero.*

Sean A C, B D, las diagonales del cuadrilátero A B C D; M N P Q el paralelogramo que resulta trazando por los vértices paralelas á las diagonales.

(Figura 75.)



El paralelogramo MN PQ, será formado de cuatro paralelogramos parciales AOBM, BOCN, CODP D O A Q, cuyas diagonales, AB, BC, CD, DA, son los lados del cuadrilátero dado. Estas diagonales dividen á cada paralelogramo parcial en dos triángulos iguales, luego

$$
\begin{aligned}
AOBM &= 2\ AOB,\\
BOCN &= 2\ BOC,\\
CODP &= 2\ COD,\\
DOAQ &= 2\ DOA,
\end{aligned}
$$

y sumando tendremos

$$MNPQ = 2\ ABCD,$$

es decir, que el paralelogramo MNPQ, es igual al duplo del cuadrilátero ABCD.

98) Se llama *centro de figura* á un punto tal, que toda recta que pasa por él y termina en el perímetro de la figura, es dividida por el punto en dos partes iguales. La intersección de las diagonales de un paralelogramo es su centro de figura.

Ejercicios.

Teoremas á demostrar.

TRIÁNGULOS. 1.º — Si en un triángulo ABC, se traza por el punto medio de AB una paralela DE á BC, el punto E en que encuentra al otro lado es su punto medio, y $DE = \frac{1}{2}$ BC.

2.º — La mediana AO de un triángulo rectángulo en A, es la mitad de la hipotenusa.

3.º — Cuando en un triángulo ABC, rectángulo en A, la hipotenusa BC, es doble del lado AB del ángulo recto, el ángulo C es igual al tercio de un recto.

4.º — El ángulo D A O de la mediana y de la altura de un triángulo rectángulo, es igual á la diferencia de los dos ángulos agudos.

5.º — Al mayor lado corresponde la menor mediana.

6.º — La suma de las perpendiculares bajadas de un punto de la base de un triángulo isósceles sobre los otros dos lados es una cantidad constante, cualquiera que sea el punto elegido.

7.º — ¿Qué resultará si el punto se toma desde la prolongación de la base?

8º. — La suma de las perpendiculares trazadas de un punto interior cualquiera de un triángulo, sobre los tres lados es igual á la altura del triángulo.

9.º — ¿Qué sucederá si se trazan las perpendiculares de un punto exterior á un triángulo?

CUADRILÁTEROS. 10. — Los puntos medios de los lados de un cuadrilátero son los vértices de un paralelogramo. ¿Cuándo el paralelogramo es un rombo? ¿Cuándo es un rectángulo?

11. — La recta que une los puntos medios de las diagonales de un cuadrilátero, pasa por el centro del paralelogramo cuyos vértices están en los puntos medios de los lados del cuadrilátero.

12. — Las diagonales de dos paralelogramos, *inscrito uno en otro*, es decir, tales que los vértices del uno estén sobre los lados del otro, se cortan en un mismo punto.

13. — Demostrar: 1.º que en un rectángulo se pueden inscribir paralelogramos cuyos lados sean respectivamente paralelos á las diagonales del rectángulo; 2.º que el perímetro de cada uno de estos paralelogramos, es igual á la suma de las diagonales del rectángulo.

14. — Siendo dado un rectángulo y un punto situado en el interior de este cuadrilátero; si se considera al punto dado como una bola muy pequeña y al perímetro del rectángulo como una línea material perfectamente elástica, de modo que cuando la bola vaya á chocar en ella, se verifique que el ángulo de inciden-

cia sea igual al de reflexión, encontrar la dirección en la cual es necesario lanzar la bola para que vuelva al punto de partida, después de tocar á los cuatro lados del rectángulo. ¿Cuál será la longitud del camino recorrido por la bola?

15. — ¿Cuál es el polígono en que la suma de los ángulos es igual á 26 rectos?

16. — ¿Cuál es el polígono regular cuyo ángulo vale $1 \frac{2}{3}$ de ángulo recto?

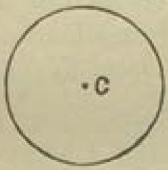
17. — Hallar el ángulo de cada polígono regular hasta el de 20 lados.

LIBRO SEGUNDO.

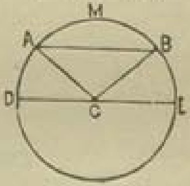
De la circunferencia del círculo.

99) Definiciones:—*La circunferencia del círculo* es una línea plana cuyos puntos están equidistantes de otro situado en su plano, que se llama *centro*.

(Figura 76.)



(Figura 77.)



Círculo es la porción de plano limitada por la circunferencia.

Un arco de círculo (*) es una porción A M B de la circunferencia y la recta A B que liga sus extremos se llama *cuerda* del arco. Una cuerda corresponde á dos arcos cuya reunión forma la circunferencia.

Se llama *radio*, á toda recta que vá del centro á la cincunferencia, tales son C A y C B.

(*) Se acostumbra á decir, por abreviación, círculo en vez de circunferencia del círculo, así se dice, arco de círculo refiriéndose á la línea.

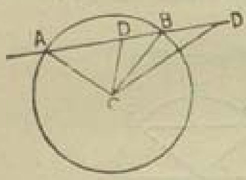
Se llama *diámetro* á toda cuerda D E que pasa por el centro. Según la definición, todos los diámetros de una misma circunferencia son iguales, puesto que cada uno es doble del radio.

Llámase, en general, *secante* á la recta que corta á la circunferencia.

Teorema 52.

100) *Una línea recta, no puede encontrar á la circunferencia de un círculo en más de dos puntos.*

(Figura 78.)



En efecto, si la recta encontrara á la circunferencia en más de dos puntos, ligando estos por rectas al centro, tendríamos más de dos oblícuas iguales trazadas de un punto á una recta lo que es absurdo. (41).

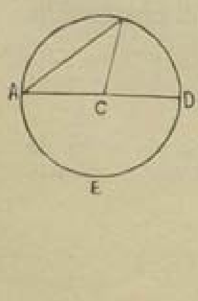
Teorema 53.

101) 1.° *El diámetro es la mayor de las cuerdas de una circunferencia de círculo.*

2.° *El diámetro divide en dos partes iguales á la circunferencia y al círculo.*

1. — Sea A B una cuerda que no pasa por el centro C del círculo; tracemos los radios C A, C B, y el diámetro A D.

(Figura 79.)



En el triángulo A B C, tenemos

$$AB < AC + CB,$$

pero

$$AC + CB = AD,$$

luego

$$AB < AD.$$

es decir, la cuerda A B, que no pasa por el centro, es menor que el diámetro.

2.° — Cortando en dos partes la figura por el diámetro A D y superponiendo la A B D sobre la A E D, de manera que el diámetro sea común, todos los puntos de la primera se aplicarán sobre todos los de la segunda, por ser equidistantes del centro C. Luego, el diámetro divide á la circunferencia y al círculo en dos partes iguales.

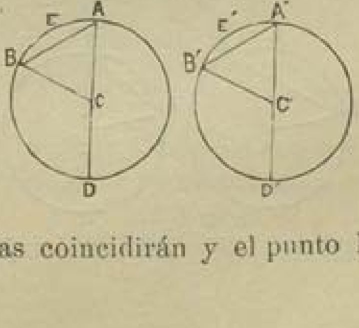
Dependencia mútua de los arcos y de las cuerdas.

Teorema 54.

102) *En un mismo círculo ó en círculos iguales, á arcos iguales corresponden cuerdas iguales. Recíprocamente, dos arcos son iguales si tienen cuerdas iguales, siendo los dos menores ó mayores que una semicircunferencia.*

Siendo los círculos C A, C' A', iguales entre sí, y el arco A E B igual al arco A' E' B', las cuerdas A B y A' B' serán iguales.

(Figura 80.)



En efecto, superponiendo el círculo C, sobre el C', de modo que sus centros coincidan y que el punto A se coloque sobre el A', las dos circunferencias coincidirán y el punto B se aplica sobre el B' por la igualdad de los arcos; entonces las cuerdas A B y A' B', que tienen comunes las extremidades, coinciden también y son iguales.

Recíprocamente, si los arcos A E B *y* A' E' B', *menores que una semi-circunferencia, tienen cuerdas iguales* A B = A' B', *serán iguales entre sí.*

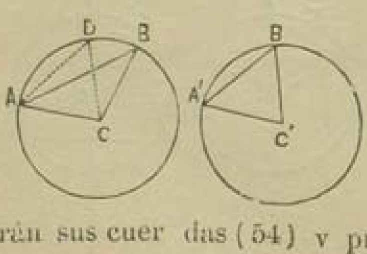
En efecto, los radios llevados á los extremos de las cuerdas iguales, determinan dos triángulos CBA, C' B' A', que son iguales por tener sus tres lados respectivamente iguales; luego los ángulos en A y en A' de estos triángulos son iguales entre sí. Sentado esto, apliquemos el centro C sobre el C' de modo que el punto A se aplique sobre el A'; las dos circunferencias coinciden y la cuerda A B toma la dirección de la A' B' á causa de la igualdad de los ángulos A = A'; el punto B coincide con el B', y el arco A E B es igual al arco A' E' B'.

Teorema 55.

103) *En un mismo círculo ó en círculos iguales, si dos arcos son desiguales y menores que una semi-circunferencia, el mayor es subtendido por la cuerda mayor y recíprocamente*

Sean los círculos C A, C' A', iguales y además

(Figura 81.)



arc. A B > arc. A' B'

Tomemos sobre el arco mayor A B una parte A D = A'B', y tracemos la recta AD.

Siendo iguales los arcos A D, A' B', lo serán sus cuerdas (54) y probaremos que la cuerda

A B es mayor que la cuerda A D. Para esto, tracemos los radios que concurren á las extremidades de las cuerdas A B, A D. Tendremos así que, ángulo A C D $<$ ángulo A C B, y los triángulos ACD, ACB, tendrán un ángulo desigual comprendido entre dos lados respectivamente iguales, y el tercer lado A B, opuesto al mayor ángulo, será mayor que el lado A D = A' D' opuesto al menor.

103) Recíprocamente, *en un mismo círculo ó en círculos iguales, dos arcos menores que una semi-circunferencia son desiguales si sus cuerdas son desiguales, y el que tiene mayor cuerda es el mayor.*

En efecto, si la

$$\text{cuerda } A\,B > \text{cuerda } A\,D,$$

el arco A B será mayor que el arco A D. No podrá ser igual ó menor que este arco, porque en el primer caso las dos cuerdas deberán ser iguales, lo que está en contra de la hipótesis; y en el segundo caso, la cuerda A B debería ser menor que la cuerda A D, lo que igualmente está en contra de la hipótesis.

Observación. — La cuerda de un arco mayor que una semi-circunferencia, disminuye cuando el arco crece, por tanto el teorema precedente y su recíproco no serán verdaderos sino en el caso en que los arcos considerados sean menores que una semi-circunferencia.

Teoremas á demostrar

1.º—Por un punto M, interior ó exterior y por el centro C de un circunferencia, se traza una secante A M B ó M A B que la corta en los puntos A y B; 1.º las distancias M A y M B serán la mayor y menor desde el punto M á la circunferencia; 2.º las rectas que parten del punto M, hasta la circunferencia son iguales de dos en dos; 3.º consideradas dos de estas rectas, la mayor será aquella cuyo segundo extremo se encuentra más distante del punto A.

2.º — La mayor y menor distancia rectilínea entre dos circunferencias interiores ó exteriores, se miden sobre la recta que liga sus centros.

3.º—La mayor y menor de todas las líneas rectas que pueden trazarse de un punto á una circunferencia, pasan por su centro.

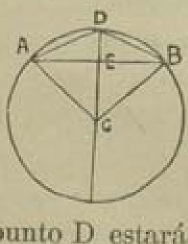
4.º — Si dos arcos A B, C D, de una misma circunferencia, son iguales, sus cuerdas A B, C D, y las rectas A C, B D, que unen en cruz las extremidades de estos arcos, se cortan sobre el mismo diámetro.

Teorema 56.

104) *El radio perpendicular á una cuerda divide á esta y al arco subtendido, en dos partes iguales.*

Sea C D, el radio trazado perpendicularmente á la cuerda A B; uniendo C con A y B, tendremos los dos radios C A, C B, que son respecto á la perpendicular dos oblícuas iguales, cuyos pies, por consiguiente equidistarán del pié E de la perpendicular, luego AE = EB.

(Figura 82.)



Siendo E D perpendicular á la cuerda A B, en su punto medio, el punto D estará también á igual distancia de A y B; luego las cuerdas A D, D B serán iguales, y de su igualdad resulta la igualdad de los arcos A D, D B.

105) CorolaRIO I.—*El centro de un círculo, el punto medio de una de sus cuerdas y el punto medio del arco por ella subtendido, están sobre una misma línea recta perpendicular á la cuerda.*

Como una línea recta está determinada por dos puntos, ó por un sólo punto y la condición de ser perpendicular á una recta dada, este corolario dá lugar á los seis enunciados siguientes:

1.º—*El radio perpendicular á una cuerda, divide á esta y al arco subtendido, en dos partes iguales.*

2.º—*La perpendicular trazada por el punto medio de una cuerda, pasa por el centro del círculo y por el punto medio del arco por ella subtendido.*

3.º—*La perpendicular trazada del punto medio de un arco, sobre su cuerda, la divide en dos partes iguales y pasa por el centro del círculo.*

4.º—*El radio que liga el punto medio de una cuerda, le es perpendicular y divide en dos partes iguales al arco subtendido.*

5.º—*El radio que vá al punto medio de un arco, divide á la cuerda de este arco en dos partes iguales y le es perpendicular.*

6.º—*La línea recta determinada por los puntos medios de un arco y de su cuerda, pasa por el centro del círculo y es perpendicular á la cuerda.*

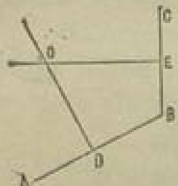
106) CorolaRIO II.—*El lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de un círculo, paralelas á una recta dada, es el diámetro perpendicular á esta línea.*

Teorema 57.

107) *Tres puntos que no están en línea recta, determinan una circunferencia de círculo.*

Sean A, B, C, tres puntos que no están en línea recta; tracemos las rectas A B, B C, y levantemos en los puntos medios D, E, perpendiculares á estas rectas. Estas perpendiculares se cortarán en un punto O, pues si ellas fueran paralelas, como dos paralelas tienen su perpendicular común, las rectas A B y B C estarían en la prolongación de una de ellas y los tres puntos A, B, C, estarían en línea recta lo que es contra la hipótesis.

(Figura 83.)



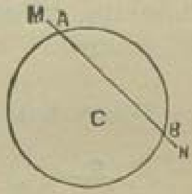
El punto O, está situado á igual distancia de los puntos A, B, por pertenecer á la perpendicular levantada en el punto medio de A B; por igual razón, está á igual distancia de los puntos B, C. Por consiguiente, el punto O equidista de los tres puntos dados y es el centro de una circunferencia que pasa por estos tres puntos. Esta circunferencia es única, pués el punto O, encuentro de las perpendiculares D O, E O, es el único del plano cuyas distancias á los tres puntos dados son iguales entre sí.

108) Corolario. — *Dos circunferencias de círculo que tienen tres puntos comunes, coinciden.*

Dependencia mútua de las longitudes de las cuerdas y de sus distancias al centro.

Definiciones.—Se llama *secante* á toda línea recta que tiene dos puntos comunes con una circunferencia. Así, la recta M N que tiene los puntos A, B, comunes con la circunferencia C, es una secante.

(Figura 84.)



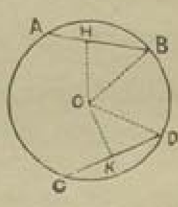
Cuando la recta prolongada no tiene más que un *punto* común con la circunferencia, tiene el nombre de *tangente*. (*) Este punto se llama *punto de contacto.*

Teorema 58.

109) *En un círculo ó en círculos iguales: 1.° las cuerdas iguales equidistan del centro; 2.° de dos cuerdas desiguales, la mayor es la más cercana al centro.*

1.° —Sean A B, C D, dos cuerdas iguales de la circunferencia O. Tracemos del centro O, las perpendiculares O H, O K, á las cuerdas y los radios que concurren á los extremos B, D. Los triángulos O H B, O K D así formados, son iguales, por ser rectángulos y tener las hipotenusas O B = O D, por radios de la misma circunferencia, y los catetos H B = K D, porque la perpendicular á una cuerda

(Figura 85.)



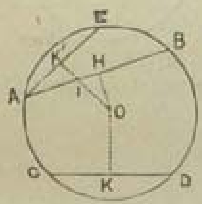
(*) La verdadera definición de la *tangente* es la siguiente: La tangente es la posición límite que toma la secante cuando girando al rededor de uno de los puntos comunes con la circunferencia, el segundo se vuelve contiguo al primero.

trazada del centro, la divide en dos partes iguales. De la igualdad de estos triángulos, resulta

$$OH = OK,$$

pero O H, O K, miden las distancias de las cuerdas al centro, y luego, las cuerdas iguales equidistan del centro.

(Figura 86.)



2.° — Sean las cuerdas

$$AB > CD$$

Tomemos sobre el arco A B, una porción

$$AE = CD,$$

trazando la cuerda A E, que por ser igual á la C D estará á igual distancia del centro. Sentado esto, tracemos la perpendicular O H á la cuerda A B y la O K' á la A E. Esta última, encuentra á la cuerda A B en un punto I, formando un triángulo I H O, donde se tiene

$$IO > OH.$$

Con mayor razón

$$IO + IK' > OH,$$

ó lo que es lo mismo

$$OK > OH,$$

y la cuerda mayor A B está á menor distancia del centro O, que la cuerda menor C D.

110) Escolio.—Las recíprocas de las proposiciones precedentes son verdaderas y se establecen por reducción al absurdo.

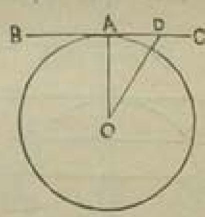
111) Corolario.—La menor de todas las cuerdas de una circunferencia que pasan por un *punto interior*, es la perpendicular al radio que pasa por dicho punto, y la mayor, el diámetro correspondiente.

Teorema 59.

112) 1.º—*La perpendicular trazada á un radio, en su extremidad, es tangente á la circunferencia.*

2.º—Recíprocamente, *toda línea recta tangente á una circunferencia, es perpendicular al radio que pasa por el punto de contacto.*

(Figura 87.)



1.º—Por el punto A, tracemos la perpendicular B C al radio O A, la cual será tangente á la circunferencia.

En efecto, la distancia O D, del centro á un punto cualquiera D de la recta B C, diferente del A, será oblícua á esta recta y por tanto mayor que la perpendicular O A. Luego, los puntos D serán exteriores á la circunferencia y la recta B C solo tiene común con esta el punto A.

2.º—Recíprocamente, *si la recta* B C *toca á la circunferencia en el punto* A, *es perpendicular al radio* O A.

En efecto, siendo por hipótesis, todo punto D diferente del A, exterior á la circunferencia, el radio O A es la línea más corta que se puede trazar del centro O á la tangente B C.

113) Corolario I. — Por un punto de una circunferencia, no se puede trazar más que una tangente á la curva.

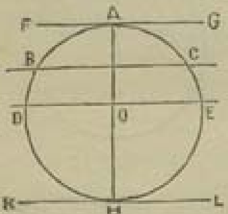
114) Corolario II. — La tangente es paralela á todas las cuerdas que el diámetro que pasa por el punto de contacto divide en dos partes iguales.

Teorema 60.

115) *Dos rectas paralelas interceptan arcos iguales de una circunferencia de círculo.*

Tres casos pueden presentarse: 1.° que las dos rectas paralelas sean secantes; 2.° que sean tangentes; 3.° que una sea tangente y la otra secante.

(Figura 88.)



1.° — Si B C, D E, son las dos rectas secantes paralelas entre sí, el diámetro A H que les es perpendicular, divide en dos partes iguales á los arcos B A C, D A E, subtendidos por estas rectas.

Entonces, el arco B A es igual al arco A C, y el arco A D es igual al arco A E, luego:

$$\text{arc. } AD - \text{arc. } AB = \text{arc. } AE - \text{arc. } AC$$

pero

$$\text{arc. } AD - \text{arc. } AB = \text{arc. } BD,$$

arc. A E — arc. A C = arc. C E,

∴ arc. B D = arc. C E.

2.º—Si las dos rectas F G, K L, son tangentes y paralelas entre sí, el diámetro perpendicular á estas dos rectas, pasa por sus puntos de contacto A y H, luego

arc. A B H = arc. A C H.

3.º—Si una de las dos rectas paralelas es la secante B C y la otra la tangente F G, el radio trazado del punto de contacto A, es perpendicular á la tangente y á su paralela, luego divide al arco B A C en dos partes iguales,

arc. A B = arc. A C.

Ejercicios.

1.º—¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas iguales en una circunferencia de círculo dada?

2.º—Trazar por un punto dado, una circuferencia de círculo que toque á una recta en un punto determinado.

3.º—Trazar por dos puntos dados, una circunferencia que toque á una recta paralela á la determinada por los dos puntos.

4.º—Describir una circunferencia que intercepte cuerdas de la misma longitud dada, sobre dos rectas paralelas.

5.° — Las rectas que unen las extremidades de dos cuerdas paralelas, se cortan sobre el diámetro perpendicular á estas cuerdas.

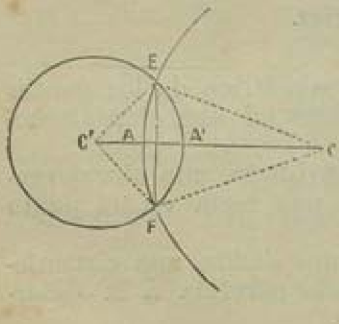
Condiciones del contacto y de las intersecciones de dos círculos.

DEFINICIÓN. — Dos circunferencias son *tangentes* en un punto común, cuando tienen la misma tangente en dicho punto.

Teorema 61.

116) *Si dos cincunferencias se cortan, la recta que une sus centros es perpendicular á la cuerda común, y la divide en dos partes iguales.*

(Figura 89.)



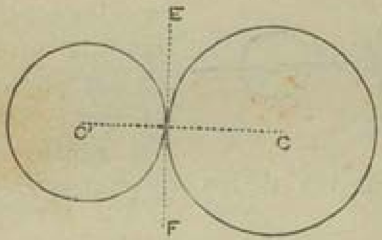
Sean C A, C' A', las dos circunferencias que se cortan en los puntos E, F. Trazando la recta que une los centros C, C', esta recta que tiene dos puntos equidistantes de los extremos de la *cuerda común* EF, es perpendicular á esta recta y la divide en dos partes iguales.

(117) COROLARIO. — *Cuando dos circunferencias*

son tangentes en un punto A, este punto se encuentra sobre la línea de los centros, y es el único común á las dos circunferencias.

En efecto, teniendo las dos circunferencias C A, C' A', la misma tangente en el punto A, los radios que concurran á este punto serán, uno prolongación

(Figura 90.)



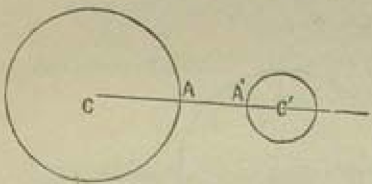
del otro, por ser ambos perpendiculares á una misma recta E F, en uno de sus puntos. En segundo lugar, del teorema precedente resulta; que cuando dos circunferencias tienen dos puntos comunes, estos dos puntos son *simétricos* respecto á la línea de los centros, es decir, que se encuentran sobre una misma perpendicular á esta línea, de uno y otro lado, y á igual distancia. Luego, si uno de estos puntos A, se encuentra sobre la línea de los centros, el otro deberá coincidir con él y las dos circunferencias no podrán tener otro punto en común.

Dos circunferencias trazadas en un plano, tendrán dos puntos comunes; uno solo, ó ninguno. En los dos últimos casos, una de las circunferencias podrá ser interior ó exterior á la otra. Luego, dos circunferencias no podrán tener, una respecto á otra, sino cinco posiciones diferentes á las cuales corresponden los cinco teoremas siguientes:

Teorema 62.

119) *Si dos circunferencias* C A, C' A' *son exteriores una á la otra, la distancia* C C' *de sus centros, es mayor que la suma de sus radios.*

(Figura 91.)



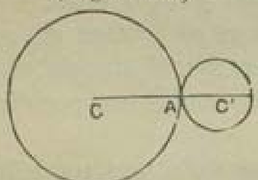
La resta D (*) que une los centros, corta á las dos circunferencias en los puntos A, A'; y es igual á la suma de los radios aumentada de la distancia A A' de los dos puntos. De suerte que,

$$D > r + r'$$

Teorema 63.

120) *Si dos circunferencias* C A, C' A', *son tangentes exteriormente, la distancia de los centros es igual á la suma de sus radios.*

(Figura 92.)



El punto de contacto A, de las dos circunferencias, está situado sobre la línea $D = CC'$ que une sus centros y comprendido entre estos puntos puesto que las circunferencias son exteriores, luego

$$D = r + r'$$

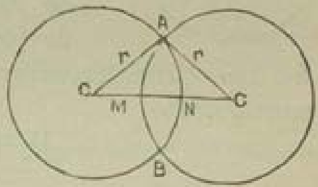
(*) Llamaremos para abreviar

$CC' = D$, $CA = r$, $C'A' = r'$

Teorema 64.

121) *Si dos circunferencias son secantes, la distancia de sus centros es menor que la suma de sus radios y mayor que su diferencia.*

(Figura 93.)



Siendo A, uno de los puntos de encuentro de las dos circunferencias y trazando los radios que van á este punto, tendremos el triángulo C A C' que dá

$$D < r + r', D > r - r'.$$

Observación. — Cuando dos arcos de círculo se cortan en un punto, se dice que ellos forman un *ángulo* en dicho punto, y se mide por el que forman las tangentes trazadas á estos arcos por el *vértice* y en el mismo sentido que ellos.

De aquí resultan los dos teoremas fáciles de demostrar:

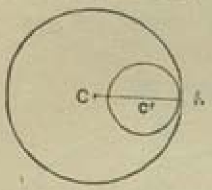
1.° — *El ángulo de dos arcos de círculo, es el suplemento del que forman los radios que concurren al vértice.*

2.° — *Dos circunferencias secantes, se cortan en dos puntos bajo el mismo ángulo.*

Teorema 65.

122) *Cuando dos circunferencias son tangentes interiormente, la distancia de los centros es igual á la diferencia de sus radios.*

(Figura 94.)



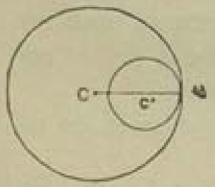
El punto de contacto A, está situado sobre la línea C C' = D de los centros y del mismo lado de los dos puntos por ser una de las circunferencias interiores á la otra; por consiguiente

$$D = r - r'$$

Teorema 66.

123) *Si dos circunferencias no se tocan, siendo una de ellas interior á la otra, la distancia de los centros es menor que la diferencia de los radios.*

(Figura 95.)



Prolongando la recta C C' = D que une los centros, esta encontrará á las dos circunferencias en los puntos A y B, la distancia C C', es igual á la diferencia de los radios, disminuida de la distancia B A, luego

$$D < r - r'$$

124) Corolario. — Las recíprocas de las cinco proposiciones precedentes son verdaderas. En efecto, las cinco posiciones que pueden ocupar dos cír-

culos son excluyentes las unas de las otras, es decir, que si dos círculos ocupan una de las cinco posiciones, no podrán ocupar al mismo tiempo una de las otras cuatro. Luego las propiedades que caracterizan estas posiciones se excluyen mútuamente.

Las relaciones:

1.ª	$D > r + r'$	para los círculos exteriores
2.ª	$D = r + r'$	Id tangentes exteriormente
3.ª	$\left\{ \begin{array}{l} D < r + r' \\ D > r - r' \end{array} \right\}$	Id los círculos secantes
4.ª	$D = r - r'$	Id tangentes interiormente
5.ª	$D < r - r'$	Id interiores uno al otro

Verificada la 1.ª, lleva consigo *á fortiori* $D > r - r'$ y excluye por consecuencia á las otras cuatro.

Lo mismo para la segunda. En cuanto al caso de los círculos secantes, una de las dos relaciones que lo caracterizan no lleva consigo á la otra y es necesario que estas dos condiciones existan simultaneamente, para que su conjunto excluya á las otras cuatro. En fin, la cuarta relación $D = r - r'$ lleva consigo á la $D < r + r'$, y excluye por consiguiente, las relaciones de los otros cuatro casos. Lo mismo sucede con la quinta condición. Resulta pues, que las recíprocas de las cinco proposiciones, son verdaderas.

Ejercicios

1.º—Cuando dos circunferencias no se tocan, la menor y mayor de las rectas que pueden trazarse de una á la otra, pasan por sus centros.

2.º—¿Cuál es el lugar geométrico de los centros de las circunferencia descritas con un mismo radio y que cortan bajo un mismo ángulo á una circunferencia dada?

3.º—¿Cuál es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias, que descritas con un mismo radio, dividen en dos partes iguales á una circunferencia dada?

4.º—Describir una circunferencia que pasando por un punto dado, pase por otro punto tocando á una circunferencia dada, en un punto determinado.

5.º—Demostrar que cuando van á concurrir á un punto, varias cuerdas prolongadas de una circunferencia, sus puntos medios están sobre una circunferencia.

6.º—Describir de los vértices de un triángulo tres circunferencias tales, que cada una toque á las otras dos.

Medida de los ángulos.

125) *Medir* una magnitud, es hallar el número de veces que la unidad de su especie y partes de esta, están contenidas.

Cuando una magnitud dada, está contenida exactamente un cierto número de veces en otras dos magnitudes, la primera es una *común medida* de las otras dos.

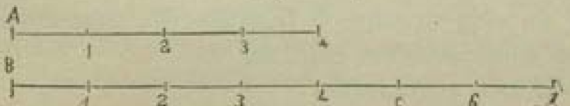
Entre todas las medidas comunes á dos magnitudes, habrá una mayor que las otras la que toma el nombre de *máxima común medida,* conteniéndolas como sus partes alícuotas.

La máxima común medida se obtiene por un procedimiento análogo al de la Aritmética para encontrar el *máximo común divisor* de dos números enteros. Para obtener la *máxima común medida,* se lleva sucesivamente la menor de las magnitudes sobre la mayor; después el resto sobre la menor y así siguiendo. Si se encuentra una magnitud que esté contenida exactamente, las magnitudes son *conmensurables* entre sí, si esto no es así, es decir, si es necesario prolongar indefinidamente la operación, las magnitudes serán *inconmensurables* entre sí. Esto último lo observamos, si tratamos de la común medida del lado de un cuadrado y su diagonal.

126) La *razón* de dos magnitudes de la misma especie, es el número que expresa la medida de la primera tomando á la segunda por unidad.

Si dos magnitudes A, B, (por ejemplo lineales) *son conmensurables, la razón de estas magnitudes es en*

(Figura 96.)



general, un número fraccionario, que se obtiene dividiendo uno por otro los dos números que expresan el número de veces que una unidad común cualquiera, está contenida en cada una de ellas.

Sea $M = 0.^{m}01$, la máxima común medida de las dos magnitudes lineales A, B; se tendrá

$$A = 4\,M = 0.^{m}04,$$

$$B = 7\,M = 0.^{m}07,$$

y la razón

$$\frac{A}{B} = \frac{4}{7}.$$

Si m es una medida común cualquiera por ejemplo,

$$10.\,m = M, \text{ será } m = 0.^{m}001,$$

se tendrá

$$A = 4 \times 10.\,m = 4 \times 0.^{m}01 = 0.^{m}04,$$

$$B = 7 \times 10.\,m = 7 \times 0.^{m}01 = 0.^{m}07,$$

$$\therefore \quad \frac{A}{B} = \frac{4}{7}.$$

Luego, cualquiera que sea la común medida m, la razón tendrá siempre el mismo valor.

Recíprocamente: *cuando la razón de dos magnitudes es un número entero ó fraccionario, estas magnitudes son commensurables entre sí.*

En efecto, si la razón

$$\frac{A}{B} = \frac{4}{7},$$

el sétimo de B, estará contenido 4 veces en A, y las magnitudes A y B, tienen una común medida igual al sétimo de B.

Cuando dos magnitudes A, B, *son inconmensurables entre sí, no se podrá medir la primera tomando á la* *segunda* B *por unidad; pero se podrá siempre encontrar una magnitud* A' *que sea conmensurable con* B *y que difiera, tan poco como se quiera, de la magnitud* A.

En efecto, si se divide á B en un número muy grande de partes iguales, 1.000.000, por ejemplo, y se toma para valor de A', al mayor múltiplo de esta fracción de B contenida en A, el error que se comete al tomar A' por A, será menor que una millonésima parte de la magnitud B.

En las aplicaciones numéricas se reemplaza siempre A por A', y cuanto se refiera á la razón de A á B deberá entenderse que se refiere á la de A' á B.

127) Definiciones: — Se llama *ángulo al centro*, un *ángulo* cuyo vértice está situado en el centro de una circunferencia de círculo.

Se llama *ángulo inscrito* en un círculo, al formado por dos cuerdas que se cortan sobre la circunferencia de este círculo.

Sector de círculo, es la porción comprendida entre dos radios. *Segmento de círculo* es la porción de un círculo comprendido entre un arco y su cuerda.

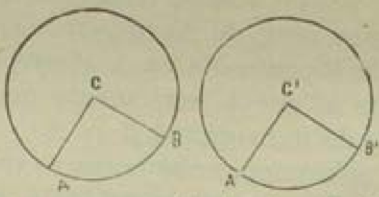
Un polígono es *inscrito* en un círculo, cuando sus vértices están situados sobre la circunferencia. Recíprocamente, se dice que el círculo es *circunscrito* al polígono.

Teorema 67.

128) *En un círculo ó en círculos iguales, dos ángulos al centro iguales, interceptan arcos iguales y recíprocamente.*

Considerando los dos círculos C A, C' A' iguales entre sí, demostremos que los arcos A B, A' B', interceptados por los lados de dos ángulos iguales A C B, A' C' B', son también iguales entre sí.

(Figura 97.)



Para esto, se superpone el círculo C' A' sobre el C A de modo que el punto A' se coloque sobre el A; el radio C' A' se colocará sobre el C A y las dos circunferencias coinciden. Pero siendo, ángulo A' C' B' = ángulo A C B, por hipótesis, el radio C' B' se aplica sobre el C B; el arco A' B' coincide con en el arco A B y se tiene

arco A' B' = arco A B.

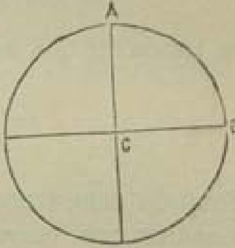
Recíprocamente, si los arcos A' B', A B, *son iguales, los ángulos al centro que les corresponden, son también iguales.*

Pues si superponemos los círculos de modo que los radios C' A' y C A coinciden, el arco A' B' se aplicará sobre el A B, por ser iguales; el radio B'C' toma la dirección del B C y los ángulos al centro A' C' B', A C B, cuyos lados coinciden en la superposición, son iguales entre sí.

129) Corolario.— *Si se hace centro en el vértice de un ángulo recto* A C B *y describe una circunfe-*

rencia cualquiera, de radio CA, el arco AB, interceptado por este ángulo, es igual al cuarto de la circunferencia.

(Figura 98)



En efecto, los cuatro ángulos formados por las rectas AC, CB, prolongadas, son iguales entre sí por ser rectos, y dividen á la circunferencia en cuatro arcos iguales.

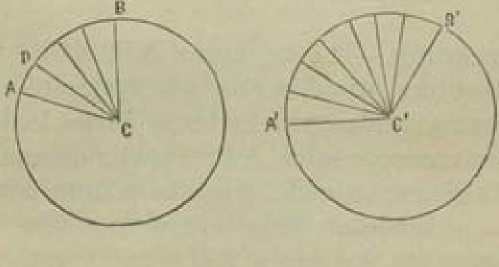
OBSERVACIÓN. — Se designa con frecuencia, al cuarto de la circunferencia con el nombre de *cuadrante*.

Teorema 68.

130) *En un círculo ó en círculos iguales, la razón de dos ángulos al centro, es igual á la de los arcos interceptados.*

Consideremos, en dos círculos iguales, AC, A'C',

(Figura 99.)



dos ángulos al centro ACB, A'C'B', y los arcos interceptados AB, A'B', que supondremos conmensurables entre sí, y demostremos, que la razón de los ángulos es la misma que la de los arcos.

En efecto, sea A D = m, la común medida de los arcos A B, A' B', tal que

$$AB = 4.\,m, \quad A'B' = 7.\,m.$$

y la razón de los arcos será

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{4}{7}.$$

Sentado esto, tracemos en las dos circunferencias los radios que corresponden á los puntos de división de los arcos A B, A' B', los que formarán ángulos al centro que interceptando arcos iguales serán iguales entre sí.

De este modo, el ángulo A C B, resulta dividido en 4 ángulos iguales al A C D; el A' C' B' en 7, iguales á los anteriores, y su razón será

$$\frac{\text{áng. } A\,C\,B}{\text{áng. } A'C'B'} = \frac{4}{7}.$$

$$\therefore \quad \frac{\text{arc. } AB}{\text{arc. } A'B'} = \frac{\text{áng. } A\,C\,B}{\text{áng. } A'C'B'}.$$

Observación. — Si los arcos A B, A' B', no son conmensurables, dividiremos, por ejemplo, al A' B' en 100 partes iguales; una de estas partes la llevaremos sucesivamente sobre A B, á partir de una de sus extremidades suponiendo que ella resulte contenida 80 veces quedando un resto menor que ella. Entonces, la razón de los arcos A B y A' B', estará comprendida entre $\frac{80}{100}$ y $\frac{81}{100}$. Si llevamos los radios que concurran á los puntos de división de los arcos, formaremos 100 ángulos iguales entre sí en el ángulo A' C' B' y 80, más uno menor, en el ángulo A C B; de modo que podemos decir: que la razón de los ángulos A C B, A' C' B', estará comprendida entre $\frac{80}{100}$ y $\frac{81}{100}$ y luego, entre los mismos números consecutivos de centésimos, que la razón de los arcos.

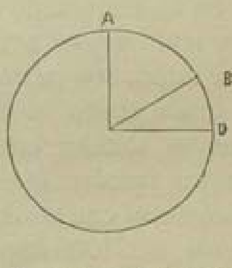
Corolario. — Se demuestra del mismo modo, que *la razón de los dos sectores* A C B, A' C' B', *es igual á la de los arcos* A B, A' B'.

Teorema 69

131) *Todo ángulo, tiene por medida el arco que intercepta sobre una circunferencia descrita de su vértice como centro, y con un radio arbitrario, siempre que se tome por unidad de medida al ángulo al centro que intercepta, sobre esta circunferencia, el arco elegido por unidad de longitud.*

Sea A C B el ángulo que se trata de medir y tomemos como unidad un ángulo cualquiera B C D. Del vértice C como centro, y con un radio arbitrario C A, describamos una circunferencia de círculo sobre la cual, los ángulos al centro A C B, B C D, interceptan los arcos A B, B D, y tomemos al arco B D interceptado por la unidad de ángulo, como unidad de longitud de los arcos de la circunferencia. La medida del ángulo A C B está expresada por la razón $\frac{ACB}{BCD}$, y la del arco A B por la razón $\frac{AB}{BD}$, pero estas dos razones son iguales.

(Figura 100.)



puesto que los ángulos al centro A C B, B C D, están entre sí como los arcos A B, B D, que ellos interceptan; luego, la medida del ángulo al centro A C B es la misma que la del arco A B comprendido entre sus lados.

OBSERVACIONES. — Ordinariamente se usa la locución inexacta: *Este ángulo tiene por medida tal arco, por ser más corta que la verdadera; este ángulo tiene la misma medida que tal arco.*

Se toma ordinariamente, al ángulo recto por unidad de ángulo, y entonces el cuarto de la circunferencia es la unidad de longitud de los arcos.

132) De lo que precede resulta, que cuando se quiera medir un ángulo, se describirá una circuferencia de círculo con radio arbitrario y centro en el vértice del ángulo, comparando luego, al cuarto de la circunferencia, el arco interceptado por el ángulo en cuestión. Para hacer esta comparación, se divide al cuadrante en un cierto número de partes iguales, buscando el número de estas partes que están contenidas en el arco interceptado por el ángulo dado.

Se ha convenido en dividir el cuadrante en 90 partes iguales que se llaman *grados*, correspondiendo, por tanto, 360 partes á la circunferencia completa.

Cada grado se ha dividido en 60 partes iguales que se llaman *minutos* y cada minuto, en otras 60 partes iguales que se llaman *segundos*. Por consiguiente, el cuarto de circunferencia contiene 5400 minutos, ó 324000 segundos.

Los grados se indican por la letra (°) escrita arriba y á la derecha del número que los representan; los minutos por un acento agudo (′) y los segundos por dos (″). Así, el número 16°, 52′, 30″, expresa 16 grados, 52 minutos, 30 segundos.

Se llama ángulo de 16°, 52 30' al que interceptará sobre una circunferencia un arco de 16°, 52 30". Para valuar la razón de este ángulo al ángulo recto, se divide al número de segundos contenidos en el arco 16°, 52, 30' por el número de segundos contenidos en el cuarto de la circunferencia ó sea el arco de 90°, y se encuentra que el ángulo propuesto es igual á

$$\frac{60750}{324000} = \frac{3}{16},$$

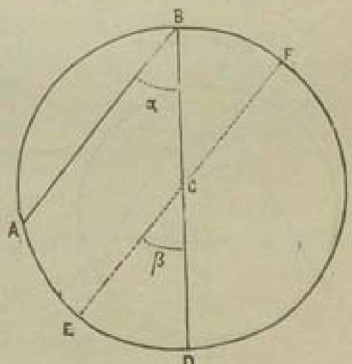
es decir, igual á $\frac{3}{16}$ de ángulo recto.

Teorema 70.

133) *Todo ángulo inscrito en una circunferencia de círculo, tiene por medida la mitad del arco comprendido entre sus lados.*

Tres casos pueden presentarse: 1.° que el ángulo inscrito esté formado por un diámetro y una cuerda; 2.° que esté formado por dos cuerdas que comprenden el centro; 3.° formado por dos cuerdas que no lo comprenden.

(Figura 101.)



1.^er^ Caso.—*Que el ángulo inscrito esté formado por el diámetro* B D *y la cuerda* A B.

Sea A B D = α el ángulo dado; tracemos por el centro C de la circunferencia, el diámetro E F paralelo á A B, que formará con el B D el ángulo β igual al α, por correspondientes.

El ángulo al centro β tiene por medida el arco E D que intercepta, pero

$$\text{arco } ED = \text{arco } BF,$$

por ser iguales los ángulos al centro á que corresponden, también.

$$\text{arco } AE = \text{arco } BF,$$

por estar comprendidos entre cuerdas paralelas, luego

$$\text{arc. } AE + \text{arc. } ED = 2 \text{ arc. } BF$$

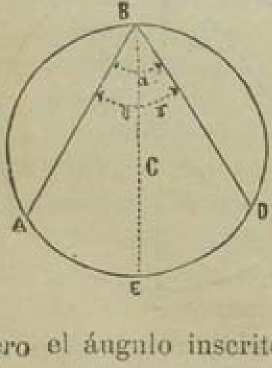
ó bien

$$\text{arc. } AD = 2 \text{ arc. } ED$$

$$\therefore \quad \tfrac{1}{2} \text{ arc. } AD = \text{arc. } ED.$$

Luego, el ángulo inscrito α, tiene por medida la mitad del arco comprendido entre sus lados.

(Figura 102.)



2.° Caso.—*Que el ángulo inscrito* A B D = α, *está formado por dos cuerdas* A B, B D, *comprendiendo al centro de la circunferencia.*

Tracemos por el vértice B del ángulo, el diámetro B E que dividirá al ángulo en dos, β, γ, tales, que

$$\alpha = \beta + \gamma,$$

Pero el ángulo inscrito β tiene por medida el arco

$\frac{AE}{2}$ (caso anterior); el γ tiene por medida el arco $\frac{ED}{2}$, luego

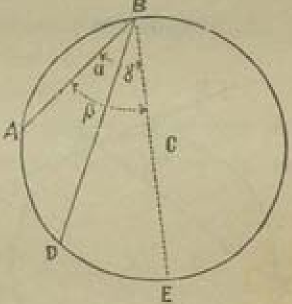
$$\tfrac{1}{2}(\text{arc. } AE + \text{arc. } ED) = \tfrac{1}{2} \text{ arc. } AD,$$

será la medida del ángulo α propuesto.

3.º Caso.—*Que el ángulo inscrito* $ABD = \alpha$, *esté formado por dos cuerdas que no comprenden al centro.*

Por el vértice B, tracemos el diámetro BE, el que formará los ángulos β, γ, con los lados del ángulo dado, tales que

(Figura 103.)



$$\alpha = \beta - \gamma$$

Pero el ángulo β tiene por medida el arco $\frac{AE}{2}$; el ángulo γ, tiene por medida el arco $\frac{DE}{2}$, luego

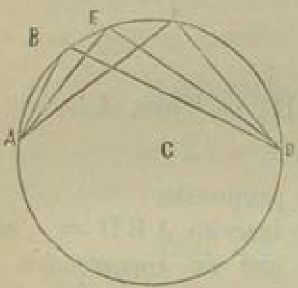
$$\tfrac{1}{2}(\text{arc. } AE - \text{arc. } DE) = \tfrac{1}{2} \text{ arc. } AD$$

será la medida del ángulo propuesto.

134) Corolario I.—*Los ángulos inscritos en un mismo segmento de círculo, son iguales.*

Así, todos los ángulos en B, E, F, cuyos lados pasan por los puntos A y D, son iguales pués tienen por medida la mitad del mismo arco A D comprendido entre sus lados.

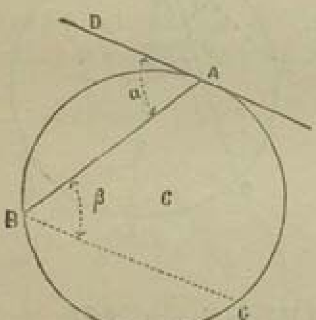
(Figura 104.)



Cuando el segmento es un semi-círculo, los ángulos inscritos son rectos pués tienen por medida la mitad de una semi-circunferencia. Si el segmento es mayor ó menor que un semi-círculo, los ángulos inscritos son agudos ú obtusos.

135) Corolario II. — *El ángulo α, formado por una tangente* D A *y una cuerda* A B *que pasa por el punto de contacto, tiene por medida, la mitad del arco* A B *comprendido entre los lados.*

(Figura 105.)

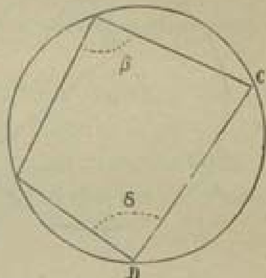


En efecto, trazando por B, la cuerda B C paralela á la tangente, se forma el ángulo inscrito $\beta = \alpha$, que tiene por medida $\frac{1}{2}$ arco A C; pero arco A C = arco A B por estar comprendidos entre cuerdas paralelas; luego $\frac{1}{2}$ arco AB, es la medida del ángulo propuesto α.

136) Corolario III. — *Los ángulos opuestos de un cuadrilátero convexo inscrito en una circunferencia de círculo, son suplementarios.*

Sea A B C D el cuadrilátero propuesto. El ángulo β inscrito, tiene por medida

(Figura 106.)



$\frac{1}{2}$ arco A D C;

el ángulo opuesto δ del cuadrilátero tiene por medida

$\frac{1}{2}$ arco A B C;

entonces, la suma $\beta + \delta$ de los ángulos opuestos tienen por medida

$$\tfrac{1}{2}\,(\text{arc. } ADC + \text{arc. } ABC)$$

es decir, la mitad de la circunferencia circunscrita, y por tanto β y δ son suplementarios.

La recíproca es verdadera, es decir:

Si los ángulos opuestos de un cuadrilátero son suplementarios, el cuadrilátero será inscriptible en un círculo.

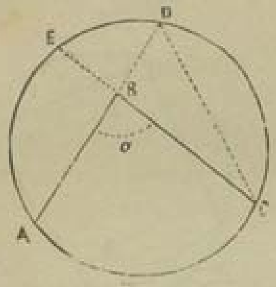
Teorema 72.

137) *Todo ángulo formado por dos secantes que se encuentran en el interior de un círculo, tiene por medida la mitad de la suma de los arcos comprendidos entre los lados y sus prolongaciones.*

Sea α el ángulo propuesto y prolonguemos sus lados hasta los puntos E y D. Trazando la cuerda

DC, tendremos que el ángulo α, es externo en el triángulo CDB y por tanto $\alpha = D + C$.

(Figura 107.)



Pero la medida del ángulo D es $\frac{1}{2}$ arco AC; la medida del C es $\frac{1}{2}$ arco ED, luego la medida del ángulo α será

$$\tfrac{1}{2}\,(\text{arc. } AC + \text{arc. } ED)$$

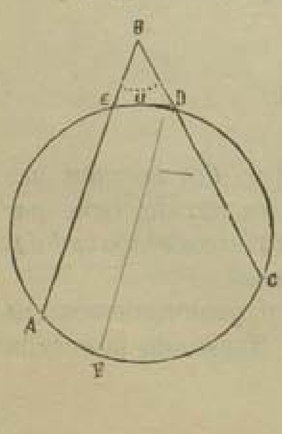
es decir, igual á la mitad de la suma de los arcos comprendidos por los lados del ángulo y sus prolongaciones.

Teorema 73.

138) *Todo ángulo formado por dos secantes que se encuentran en un punto fuera de un círculo, tiene por medida la semi-diferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.*

Sea α el ángulo dado; tracemos por el punto D, una cuerda DF paralela á la secante BA y tendremos que los ángulos α y β son iguales por correspondientes. Entonces, la medida del ángulo α, es $\frac{1}{2}$ arco FC; pero

(Figura 108.)



$$\tfrac{1}{2}\text{ arc. } FC = \tfrac{1}{2}\,(\text{arc. } AC - \text{arc. } AF)$$

y como arc. AF = arc. ED por estar comprendidos entre cuerdas paralelas, la medida del ángulo α será

$$\tfrac{1}{2}\,(\text{arc. } AC - \text{arc. } ED)$$

es decir, la semi-diferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.

OBSERVACIONES.—De la misma manera demostraríamos que la medida de un ángulo formado por una tangente y una secante ó por dos tangentes, tiene por medida la semi-diferencia de los dos arcos comprendidos entre sus lados.

Ejercicios.

1.º—¿Cuál es el lugar geométrico de las posiciones en un plano, del vértice de un ángulo cuyos lados pasan constantemente por dos puntos dados?

2.º—¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas interceptadas por una circunferencia, sobre todas las secantes que pueden trazarse por un punto dado?

3.º—Si de un punto de una circunferencia circunscrita á un triángulo, se bajan perpendiculares sobre sus lados, los piés de ellas estarán en línea recta.

4.º—Los piés de las perpendiculares trazadas de los vértices de un triángulo sobre los lados opuestos, son los vértices de un segundo triángulo cuyos ángulos tienen por bisectrices las alturas del primero.

5.º—Trazando cuatro circunferencias de modo que cada una pase por dos vértices consecutivos de un cuadrilátero inscrito, estas curvas se cortan en cuatro puntos diferentes de los vértices del cuadrilátero. Demostrar que estos cuatro puntos pertenecen á una misma circunferencia.

6.°—Cuando los lados de un ángulo cortan á dos circunferencias, las cuerdas de los arcos, que intercepta sobre una de estas curvas, prolongadas indefinidamente, forman con las cuerdas de los arcos interceptados sobre la otra, un cuadrilatero inscriptible.

7.°—Si por uno de los puntos de intersección de dos circunferencias se traza una secante, esta cortará á las circunferencias en otros dos puntos cuyas tangentes forman un ángulo constante.

8.°—Si de un punto de una circunferencia circunscrita á un triángulo se trazan tres rectas á los vértices de este, una cualquiera de ellas será igual á la suma de las otras dos.

Ejercicios numéricos.

9.°—¿Qué fracción de una circunferencia es un arco de 27° 17' 42''?

10.—Calcular la razón de dos arcos de una misma circunferencia, teniendo uno 321° 22' y el otro 27° 21' 1''.

11.—Calcular la distancia de los centros de dos círculos de radios 0^{m},05 0^{m},02 sabiendo que una tangente común interior forma un ángulo de 30° con la línea de sus centros.

12.—Siendo los lados de un triángulo, circunscrito á una circunferencia, expresados por 412^{m}, 506^{m} y 514^{m}, calcular los valores de los seis segmentos determinados por los puntos de contacto.

Problemas.

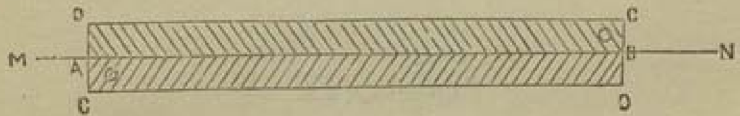
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ELEMENTALES SOBRE LA CONSTRUCCIÓN DE ÁNGULOS Y TRIÁNGULOS, EMPLEANDO LA REGLA Y EL COMPÁS.

139) DEFINICIONES.—Para trazar una línea recta sobre el papel, se emplea un instrumento que se llama *regla*. La regla es una barra de madera ó metal cuyas caras son planas y sus bordes rectos.

Cuando se quiera trazar la recta que une dos puntos dados sobre un plano, se colocará sobre este plano, una regla de manera que uno de sus bordes pase por los dos puntos dados; después se hace resbalar desde un punto al otro y á lo largo de este borde, la punta de un lápiz ó tira-línea.

Para comprobar que el borde A B de una regla C D es recto, se traza una recta M N sobre el papel

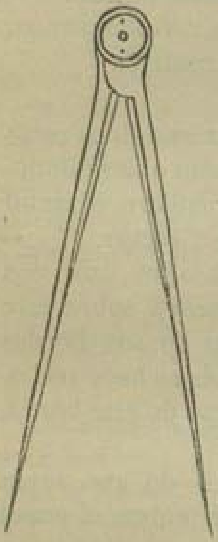
(Figura 109.)



bien tendido, haciendo resbalar la punta del lápiz á lo largo del borde A B; y se vé si invirtiendo la regla, este borde coincide con la recta trazada. Se reconoce que el borde A B es recto cuando trazando otra recta en la segunda posición, coincide con la primera en cuyo caso la regla será buena.

140) El *compás* ordinario es un instrumento con el cual se puede describir una circunferencia en un plano. Se compone de dos *ramas* de metal cuyas extremidades terminan unas en punta y las otras están articuladas de manera á poder abrirlas y cerrarlas, es decir, de manera á poder aumentar ó disminuir el ángulo que ellas forman.

(Figura 110.)



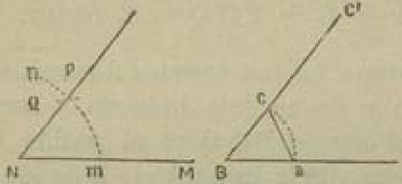
Para describir una circunferencia de círculo cuyo centro y radio son dados, se abre el compás de manera que la distancia entre sus puntas sea igual al radio dado; en seguida se coloca una de las puntas en el centro y se hace girar la otra alrededor del centro, apoyándola sobre el papel, la cual traza la circunferencia. La rama movible termina ordinariamente en un lápiz ó tira-línea que traza en el plano la circunferencia buscada.

PROBLEMA I.

141) *Formar un ángulo dado en un punto cualquiera* N *de una recta* M N.

Sea A B C el ángulo dado. Con centro en B y una abertura de compás arbitraria, se traza el arco *a c;* luego con la misma abertura de compás y con centro en N se traza el arco *m n,* y con una abertura *ac* se traza el arco Q P que cortará al *mn* en un punto B el cual unido al N, por medio de una recta,

(Figura 111.)



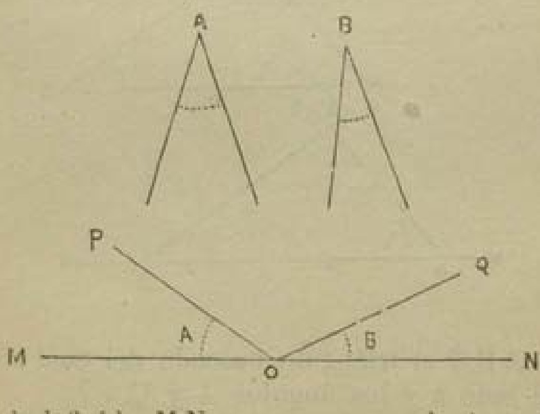
nos dará el ángulo buscado. Los ángulos N y B serán iguales por tener arcos iguales por medida.

PROBLEMA II.

142) *Siendo dados dos ángulos de un triángulo, construir el tercero.*

Sean A, B, los dos ángulos dados. Sobre una

(Figura 112.)



recta indefinida M N y en uno cualquiera de sus puntos O, se forman los ángulos A y B, es decir,

$$MOP = A, \quad QON = B;$$

pero como

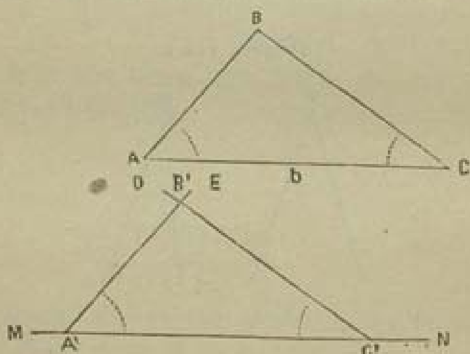
$$A + B + POQ = 2 \text{ rectos},$$

por ser la suma de los ángulos formados alrededor de un punto y de un solo lado de la recta MN, se tendrá que el ángulo POQ es el pedido, puesto que es el suplemento de la suma A + B de los dos ángulos dados.

PROBLEMA III.

143) *Siendo dados un lado de un triángulo y sus dos ángulos adyacentes, construir el triángulo.*

(Figura 113.)



Sea ABC el triángulo buscado del cual se conocen el lado b y los ángulos A y C.

Sobre una recta indefinida MN, tomemos una longitud

$$A'C' = b;$$

formemos en A' y C', los ángulos

$$EA'C' = A, \quad DC'A' = C,$$

y las dos rectas A'E, C'D forman con A'C' el triángulo A'B'C' que es igual al triángulo buscado pués estos tendrán respectivamente iguales un lado y los ángulos adyacentes (28).

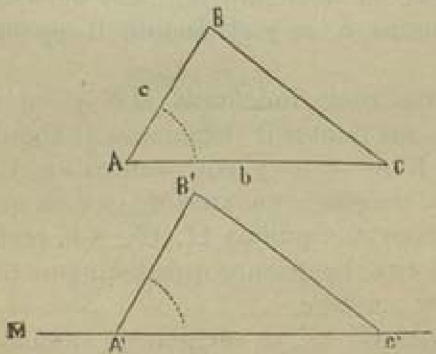
Observación I. — Para que el problema sea posible, es necesario y suficiente que la suma de los ángulos dados sea menor que dos ángulos rectos.

Observación II. — Si los datos del problema fueran, dos ángulos cualesquiera y un lado, se formará el tercer ángulo (Prob. II) refiriéndose así, al problema anterior.

PROBLEMA IV.

144) *Dados dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido eutre ellos, construir el triángulo.*

(Figura 114.)



Sea A B C el triángulo buscado en el cual conocemos los lados b y c, y el ángulo A.

Sobre una recta indefinida M N, tomemos

$$A'C' = b;$$

construyamos en A' el ángulo

$$B'A'C' = A.$$

y tomemos

$$A'B' = AB = c.$$

El triángulo A'B'C' será igual al buscado, pue estos dos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales, é igual el ángulo comprendido entre ellos.

Observación.—El problema es siempre posible y no admite más que una solución.

PROBLEMA V.

145) *Dados dos lados de un triángulo y el ángulo opuesto á uno de ellos, construir el triángulo.*

Sea A B C el triángulo buscado del cual conocemos los lados b, c, y el ángulo B opuesto á uno de ellos.

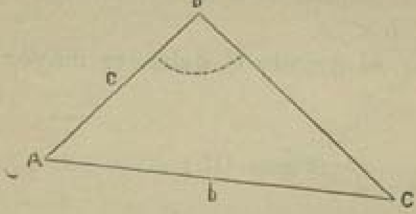
Sobre una recta indefinida M N y en uno cualquiera de sus puntos B' formemos el ángulo dado B; tomemos $B'A' = c$, y con centro en A' y radio $A'C' = b$, tracemos un arco de círculo que cortará, en general, en dos puntos C', C'', á la recta M N.

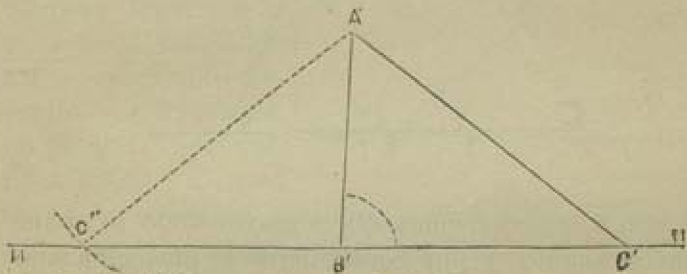
Sentado esto, tendremos que distinguir tres casos:

1.º Caso $b > c$

Los puntos C', C'', se encuentran situados á ambos lados del punto B', y se forman dos triángulos A'B'C' y A'B'C''. El primero satisface á las condiciones del enunciado, pero el segundo no las satisface, pués el

(Figura 115.)



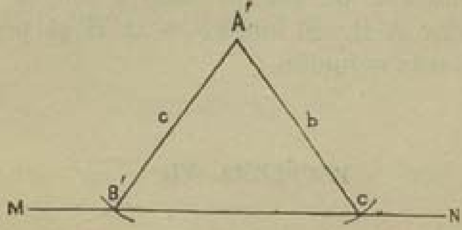


ángulo A' B' C'' no es igual al dado sino á su suplemento. Luego, el problema admite siempre una sóla solución.

2.º Caso. $b = c$.

En este caso, el ángulo B debe ser agudo, pués es

(Figura 116.)



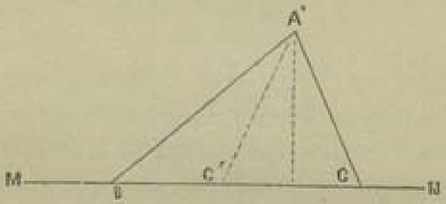
uno de los ángulos en la base de un triángulo isósceles.

La construcción muestra que el problema no es posible si no se cumple esta condición y siéndolo así el problema admite una sola solución.

3.er Caso. $b < c$.

En este caso, el ángulo C debe ser mayor que el

(Figura 117.)



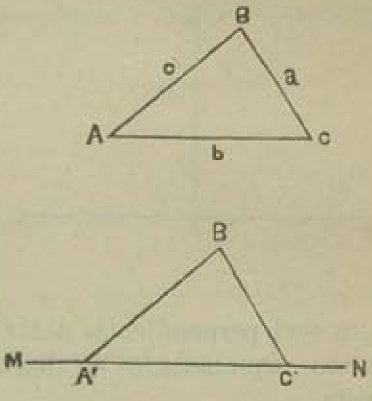
ángulo B, pués sabemos, que á mayor lado se opone mayor ángulo, y por consiguiente el problema solo será posible si el ángulo B es agudo. Cumplida esta condición, si los puntos C', C'', existen, estarán situados de un mismo lado del punto B' y los dos triángulos A' B' C', A'B' C'', satisfarán á las condiciones del enunciado, y el problema tendrá dos soluciones con la condición de ser $b >$ A' H, es decir, con la condición de ser el lado b mayor que la perpendicular A' H. Si fuera $b =$ A' H el problema tendrá una sola solución.

PROBLEMA VI.

146) *Dados los tres lados de un triángulo, construir el triángulo.*

Sea A B C el triángulo dado en el cual conocemos sus tres lados a, b, c.

(Figura 118.)



Sobre la recta indefinida M N, tomemos una longitud

$$A'C' = b.$$

Haciendo centro en los puntos A', C', y con radios respectivamente iguales á c y a, describamos dos arcos de círculo los cuales se cortarán en un punto B' que unido á los A' C', nos darán el triángulo buscado, pués A' B' C' y el buscado, serán iguales por tener sus tres lados respectivamente iguales.

Para que el problema sea posible es necesario y suficiente que los dos arcos de círculo se corten, es decir, que se tenga

$$b < a + c, \text{ y } b > c - a,$$

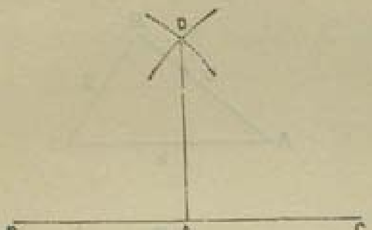
suponiendo que $c > a$.

PROBLEMA VII.

147) *Por un punto dado trazar una perpendicular á una recta.*

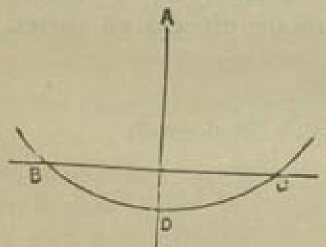
1.er Caso.—Si el punto dado A está sobre la recta B C, se marcarán sobre esta dos puntos B, C, que equidisten de A; para lo cual describiremos con centro en ese punto, un semi-círculo que dará los puntos B y C. Haciendo centro en los dos puntos, así determinados, y con un radio mayor que A C trazaremos dos arcos de círculo, que cortándose determinarán un punto D y trazando la recta D A esta será perpendicular á B C, puesto que tiene dos puntos equidistantes de los extremos B y C de la recta.

(Figura 119.)



2.º Caso — Si el punto A está fuera de la recta B C, describiremos con centro en este punto y un radio mayor que su distancia á la recta, una semi-circunferencia la que cortará á la recta en dos puntos B, C, los cuales equidistan del punto A. Haciendo centro en los puntos B y C, con un radio mayor que $\frac{BC}{2}$, se trazan dos arcos que cortandose determinan otro punto D equidistante de ellos y uniendo D con A tendremos la perpendicular D A buscada.

(Figura 120.)

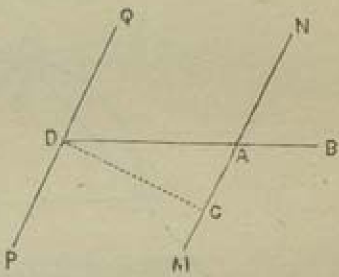


PROBLEMA VIII.

148) *Por un punto dado, trazar una paralela á una recta dada.*

1.ª Solución.—Por el punto dado D, tracemos una recta DB que corte á la recta dada MN en un punto cualquiera A; en el punto D, formemos con la recta DA el ángulo ADP = ángulo NAD y la recta DP será la paralela buscada, puesto que las dos rectas MN, PQ, forman con la transversal DB, ángulos alternos-internos iguales.

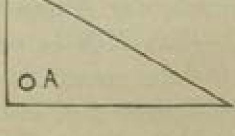
(Figura 121.)



2.ª Solución.—Tracemos, sucesivamente, por el punto D, la perpendicular DC á la recta MN, y la perpendicular DP á DC. La recta DP será paralela á MN puesto que ellas son perpendiculares á una misma recta DC (56).

Las construcciones en los dos problemas precedentes, se abrevian mucho haciendo uso de los instrumentos llamados *escuadra y trasportador.*

(Figura 122.)

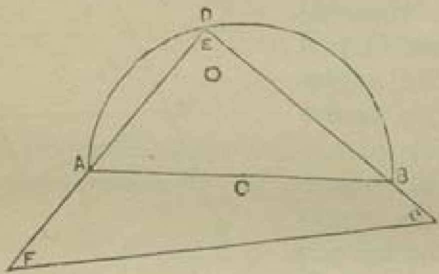


Escuadra.—La escuadra es una pequeña plancha, generalmente de madera, que tiene la forma de un triángulo rectángulo, y lleva un agujero circular A para facilitar su manejo.

Para verificar una escuadra, se puede proceder como sigue:

Con un radio arbitrario C A, se describe una semicircunferencia A D B y se inscribe el ángulo recto A D B (133). Enseguida, se aplica el mayor ángulo

(Figura 123)



de la escuadra F E G sobre el A D B de manera que el vértice E coincida con D y el lado E F con D A. Si el lado D G de la escuadra toma la dirección D B la escuadra será buena; en caso contrario será defectuosa.

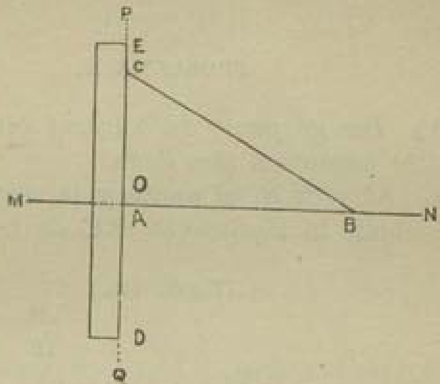
PROBLEMA IX.

Por un punto dado, trazar con la escuadra una perpendicular á una recta dada.

1.º—Sea M N la recta dada y A el punto por donde se debe trazar la perpendicular. (Fig. 124).

Coloquemos el lado A B de la escuadra sobre la recta M N, de manera que el vértice del ángulo recto coincida con el punto A de la línea; apliquemos la regla D E á contacto con el cateto A C de la es-

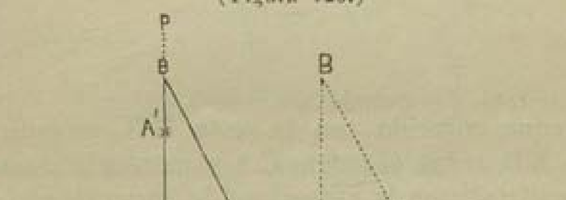
(Figura 124.)



cuadra; retirando esta y trazando una línea recta P Q, por el borde D E de la regla, tendremos la perpendicular pedida, puesto que el ángulo E A N es igual al ángulo recto C A B de la escuadra.

2.º Si el punto A', está situado fuera de la recta

(Figura 125.)



M N, se coloca la regla D E de manera que su borde coincida con la recta y aplicando contra esta regla uno de los catetos del ángulo recto de la escuadra, haremos resbalar á esta á lo largo de la regla hasta que el cateto B A pase por el punto A', y trazando la recta P Q, tendremos la perpendicular pedida.

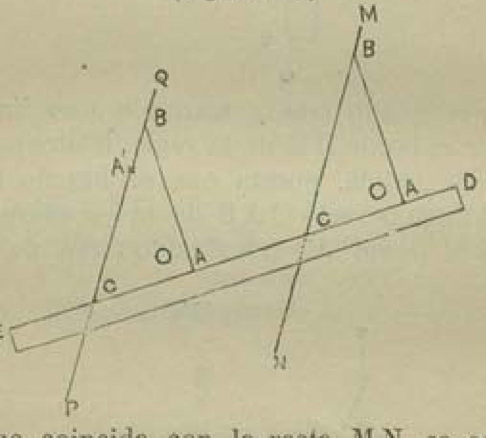
PROBLEMA X.

149) *Por un punto dado trazar con la escuadra una recta paralela á otra dada.*

Séas A' y M N, el punto y la recta dada.

Colocando la hipotenusa B C de la escuadra de

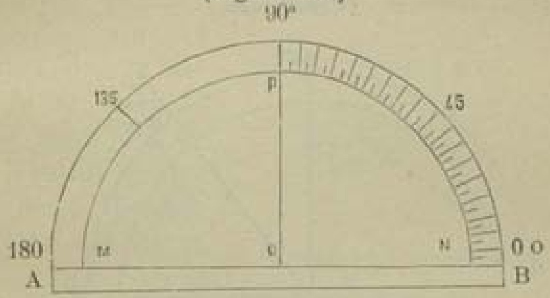
(Figura 126.)



modo que coincida con la recta M N, se aplica la regla E D, sobre el cateto C A y manteniéndola fija, se hace resbalar la escuadra á lo largo de su borde hasta que B C pase por el punto dado A'. En esta posición de la escuadra, se traza la recta P Q que será la paralela buscada á la recta M N, puesto que forma con el borde de la regla ángulos correspondientes iguales.

Trasportador. — El *trasportador* es un instrumento que sirve para medir ó trazar ángulos dados, sobre el papel. Consiste en un semi-círculo M N P

(Figura 127.)



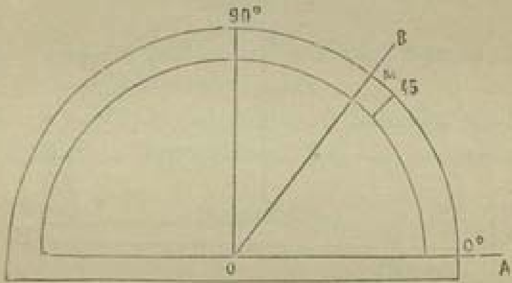
de cobre ó asta. Su *limbo* ó borde exterior está dividido en 180° grados y cada uno de estos en medios grados, terminando en el diámetro A B en cuyo punto medio hay una pequeña hendidura que se llama *centro del trasportador*.

PROBLEMA XI

150) *Medir con el trasportador, un ángulo dado* A O B.

Para obtener la medida del ángulo A O B, se coloca el centro del trasportador sobre el vértice O del ángulo dado, haciendo coincidir su diámetro con la dirección del lado O A del ángulo, y se lee la división del limbo que coincide con la dirección del otro lado O B. Si por ejemplo, coincide con la división 51 del limbo el ángulo A O B es de 51° Si la dirección del lado O B resulta contenida entre dos divisiones del limbo, por ejemplo, entre la 51

(Figura 128.)



y la 52, se apreciará á simple vista su distancia á la primera de estas divisiones y si se aprecia en $\frac{3}{4}$ de una división, se dirá que el ángulo A O B es de 51° 45'.

PROBLEMA XII.

151) *Sobre una recta dada, construir un ángulo que tenga su vértice sobre ella y sea de una magnitud dada.*

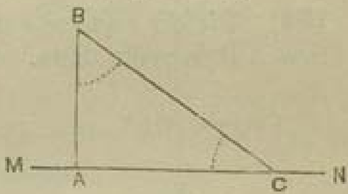
Para resolver este problema, basta colocar el centro del trasportador sobre el punto de la recta haciendo coincidir su diámetro con ella; marcar sobre el papel el punto que corresponde al número de grados del ángulo dado, y trazar con la regla, la recta que une este punto con el dado sobre la recta

PROBLEMA XIII.

152) *Por un punto dado, trazar por medio del trasportador, una perpendicular sobre la recta dada.*

1.º—Si el punto A está sobre la recta dada M N trazaremos, con el trasportador, un ángulo de 90º, y el segundo lado A B de este ángulo es evidentemente perpendicular á la recta M N.

(Figura 129.)



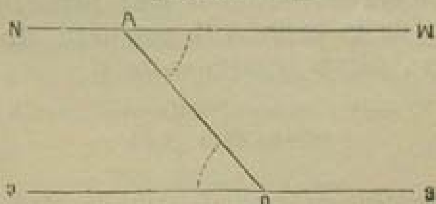
2.º—Cuando el punto dado B, está fuera de la recta, trazo una recta cualquiera B C, y mido el ángulo en C, con este valor obtengo 90º—C que es el ángulo complementario, el cual, formado en B sobre B C, dará la dirección B A que es la perpendicular buscada.

PROBLEMA XIV.

153) *Por un punto dado, trazar con el trasportador, una recta paralela á otra dada.*

Sea A el punto dado y M N la recta. Tracemos

(Figura 130.)

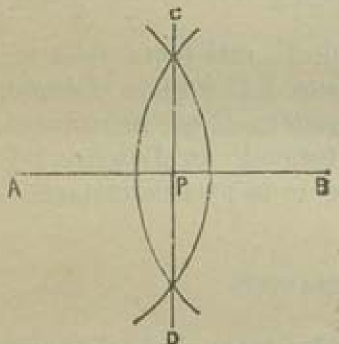


por A una recta cualquiera midiendo con el trasportador, el ángulo agudo M D A y luego en el punto A, formemos un ángulo C A D igual al medido. trazando la recta C B. Esta recta será la paralela á M N pués ellas forman con la transversal A D ángulos alternos-internos iguales.

PROBLEMA XV.

154) *Dividir una recta dada en dos partes iguales.* Sea A B la recta dada. Con centros en los extremos A y B de la recta, y con radio mayor que $\frac{A\,B}{2}$, tracemos dos arcos de círculo que se cortan en dos puntos C y D y la recta C D que los une, corta á la A B, en punto P medio de A B.

(Figura 311.)



En efecto, los puntos C, D, equidistan de los extremos de la recta A B, luego, la C D que los une es perpendicular á A B en su punto medio (46).

OBSERVACIÓN.—Aplicando este procedimiento á $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, etc., de la recta A B, resultará dividida en 4, 8, 16, etc. partes iguales entre sí.

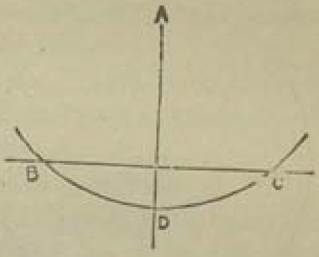
PROBLEMA XVI.

155) *Dividir un arco de círculo dado, en dos partes iguales.*

Sea A el centro del arco de círculo dado BC.

Tracemos la cuerda BC, del arco dado y sobre ella la perpendicular del punto A sobre su punto medio; la cual, prolongada encontrará al arco en su punto medio D. (104)

(Figura 132)



Observación.— Aplicando este procedimiento á $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, etc... del arco dado, se le dividirá en 4, 8, 16, etc... partes iguales.

PROBLEMA XVII.

156) *Dividir un ángulo dado en dos partes iguales.*

Del punto A como centro, describo una circunferencia que cortará á los lados del ángulo en dos puntos E, D. Trazando la cuerda ED y levantando en su punto medio S una perpendicular SF, esta será la bisectriz del ángulo dado BAC.

(Figura 133.)

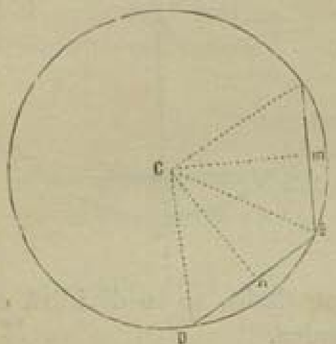
Observación.—Aplicando el mismo procedimiento á $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, etc., del ángulo dado, se dividirá en 4, 8, 16, etc., ángulos iguales entre sí.

PROBLEMA XVIII.

157) *Describir una circunferencia de círculo que pase por tres puntos dados que no están en línea recta.*

Siendo A, B, D, los tres puntos dados, tracemos las rectas A B, B D y por sus puntos medios, las perpendiculares m C, n C, que se cortarán en un punto C equidistante de los extremos A, B, D. de estas rectas. Si del punto C como centro, y radio C D, describimos una circunferencia, esta pasará por los puntos dados, pués

(Figura 134.)



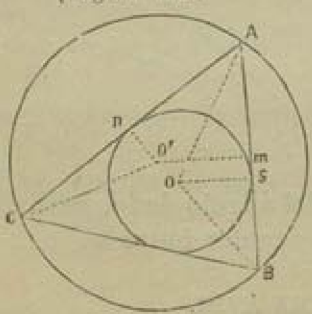
$$C D = C B = C A.$$

PROBLEMA XIX.

158) *Dado un triángulo, trazarle las circunferencias inscrita y circunscrita.*

1.° — Trazando las bisectrices de los ángulos A y B estas se cortarán en un punto O, que estará á la distancia O S de los tres lados A B, B C, C A; luego, trazando una circunferencia con centro en O y radio O S, esta será tangente á los tres lados del triángulo ó sea la circunferencia inscrita.

(Figura 135.)



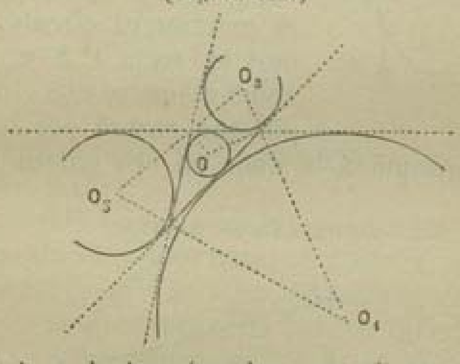
2.° — Si por los puntos medios de dos de los lados del triángulo, trazamos las perpendiculares m O', n O', se cortarán en un punto O', equidistante de sus vértices, y trazando con centro en O' y radio O' C, una circunferencia, tendremos la circunferencia circunscrita al triángulo dado.

Corolario.— *Describir un circulo tangente á los tres lados del triángulo y á las prolongaciones de los lados.*

Cuatro soluciones tiene este problema.

En efecto, las bisectrices de los ángulos interiores se cortan en un punto O' que es el centro de la circunferencia inscrita, es decir, de la circunferencia tangente á los tres lados del triángulo. Trazando

(Figura 136.)



las bisectrices de los ángulos exteriores, estas se cortan d ; en los tres puntos O_1, O_2, O_3 que son los centros de las tres circunferencias ex-inscritas, es decir, de las circunferencias tangentes á cada uno de los lados y á las prolongaciones de los otros dos.

Así, el problema propuesto, tiene cuatro soluciones.

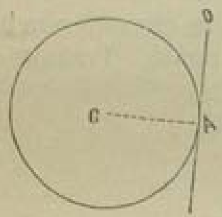
PROBLEMA XX.

159) *Por un punto dado, trazar á una circunferencia dada una tangente.*

Dos casos pueden presentarse; 1.º que el punto dado esté sobre la circunferencia; 2.º que esté fuera de ella.

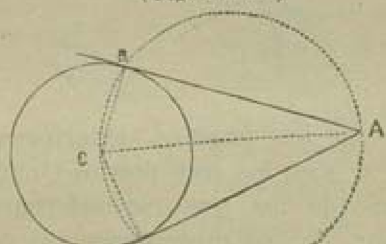
1.º—Si el punto dado A, está sobre la circunferencia, tracemos el radio C A que vá á este punto y en su extremo A, la perpendicular A D al radio, que será la tangente pedida.

(Figura 137.)



2.º—Si el punto dado A, es exterior al círculo, trazaremos la recta C A y con esta como diámetro una circunferencia que pasará por los puntos C y A, cortando á la dada en dos puntos B, D, los

(Figura 138.)

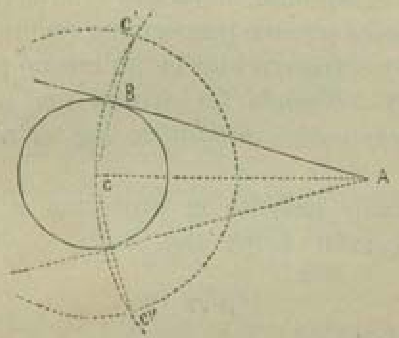


que serán los puntos de contacto de las dos tangentes A B, A D, que pueden trazarse del punto exterior A, á la circunferencia dada.

En efecto, los ángulos A B C y A D C, son rectos por ser inscritos en una semi-circunferencia, luego, A D y A B son perpendiculares á los radios C D, C B, en sus puntos extremos B y D.

Observación.—Supongamos resuelto el problema, y sea A B la tangente en el punto de contacto B.

(Figura 139.)



Tracemos el radio C B, prolongado hasta C' tal, que B C = B C'.

Si el punto C' fuera conocido, uniéndolo al punto C, se tendría el punto B de contacto y por consiguiente la tangente A B. Pero, el punto C' está determinado por la intersección de dos círculos de radios C B C' y A C, con centros en C y A, respectivamente; luego, no habrá más que trazar estos círculos, que siempre se cortarán en dos puntos, y la recta C C' determinará así el punto B de contacto, siempre que esté trazada la circunferencia B C; en caso que no lo estubiera, bastará bajar de A una perpendicular á la C C' para tener la tangente. Es evidente, que esta construcción dará las dos soluciones del problema.

PROBLEMA XXI.

160) *Trazar una tangente común á dos círculos dados.*

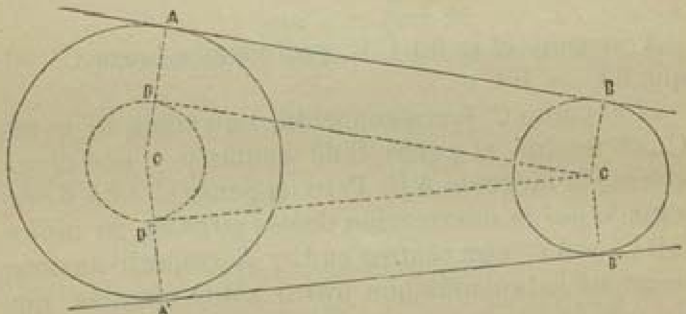
Las tangentes comunes á dos círculos, pueden cruzar ó no la línea de los centros en un punto intermedio. En el primer caso se llaman, *tangentes interiores* y el segundo, *tangentes exteriores.*

Cuatro casos pueden presentarse según la posición relativa de los dos círculos en un mismo plano,

1.er Caso.— *Cuando los círculos son exteriores, se podrán trazar cuatro tangentes; dos exteriores y dos interiores.*

Supongamos resuelto el problema y sea A B la tangente común á los dos círculos dados C, C'.

(Figura 140.)



Tracemos los radios C A, C' B, á los puntos de contacto y la recta C' D, paralela á la tangente común A B. Pero los radios C A, C' B son perpendiculares á la tangente A B; la figura D A B C' es un rectángulo que dá D A = C' B, luego

$$CD = CA - C'B.$$

es decir, C D igual á la diferencia de los radios de los dos círculos dados.

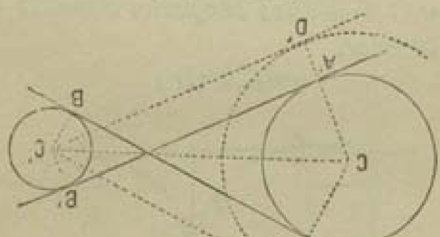
Como la recta C D, es perpendicular á la D C' se ve que si describimos, con centro en C y radio C D, una circunferencia, la recta C' D será tangente á ella. Tenemos pues, que la tangente A B debe ser paralela á una tangente trazada del centro C', á una circunferencia de centro C y cuyo radio es la diferencia de los radios de los dos círculos dados.

Entonces, *para construir la tangente común* A B, *se describe una circunferencia con centro en* C *y radio igual á la diferencia de los radios de los círculos dados; del centro* C', *se lleva una tangente* C' D, *á esta circunferencia; se traza el radio* C D *prolongado hasta encontrar en el punto* A *al círculo y por este punto se traza una paralela* A B *á* C' D *que será la tangente pedida.*

Análogamente, se trazará la otra tangente A' B'.

Si la tangente común debe ser interior á los dos

(Figura 141.)



círculos, cortará á la línea de los centros en un punto intermedio.

Supongamos el problema resuelto y sea A B, la tangente común pedida,

Unamos A C, C' B, y por el punto C' tracemos una paralela C' D á la tangente AB. La figura A B C' D. es un rectángulo que dá

$$DA = C'B,$$

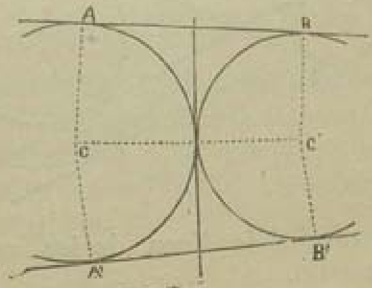
por consiguiente, la tangente pedida es paralela á una recta C'D perpendicular en la extremidad de la recta C D que es igual á la suma de los radios de los dos círculos dados.

Bastará pués, *para construir esta tangente; describir una circunferencia del punto* C *como centro, y con un radio igual á la suma de los radios de los círculos dados, trazar una tangente* C' D *á esta circunferencia, y por el punto* A, *donde* C D *la encuentra, trazar una paralela* A B *á la tangente* C' D, *que será la tangente pedida.*

Análogamente se podrá trazar una segunda tangente común A' B'.

2.º Caso.— *Cuando los dos círculos son tangentes exteriormente, tienen dos tangentes comunes exteriores y una sola interior.*

(Figura 142.)

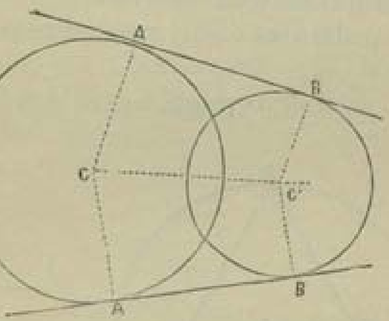


En este caso, las dos tangentes exteriores A B, A' B'.

se trazan como en el caso anterior, y en cuanto á la tangente interior, esta es perpendicular á la línea C C' de los centros.

3.er Caso.—*Cuando los círculos son secantes solo tienen dos tangentes comunes exteriores.*

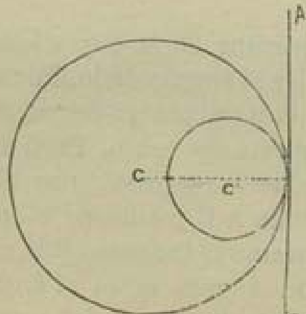
(Figura 143.)



En este caso, solo tienen las dos tangentes comunes A B, A' B' exteriores.

4.° Caso.—*Cuando los dos círculos son tangentes interiormente solo tienen una tangente común exterior.*

(Figura 144.)



En este caso, la sola tangente común A B de los dos círculos es la perpendicular á la línea de los centros.

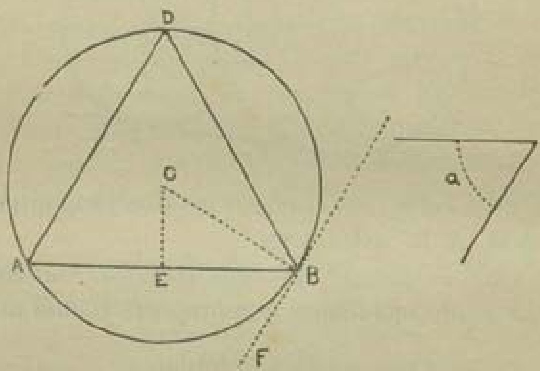
PROBLEMA XXII.

161) *Sobre una recta dada, describir un segmento de círculo, capaz de un ángulo dado.*

Sean A B la recta y α el ángulo dado.

Supongamos resuelto el problema y sea A D B el segmento pedido, es decir, un segmento tal, que todos

(Figura 145.)



los ángulos inscritos en él, cuyos lados pasan por A y B, sean iguales al ángulo dado. Para resolver el problema bastará determinar el centro C del círculo al cual pertenece este segmento. Pero el centro C, debe encontrarse sobre la perpendicular C E levantada en el punto medio de A B y además, si trazamos el radio C B y en su extremo la tangente B F, esta tangente forma con A B un ángulo igual al ángulo dado, pués tiene por medida la mitad del arco A B. De estas consideraciones, se deduce la construcción siguiente:

Se levanta una perpendicular E C, en el punto medio de A B; se traza por B una recta B F que forme con ella un ángulo

$$ABF = \alpha;$$

en el punto B, se traza una perpendicular á la B F y el punto C de encuentro de esta perpendicular con la perpendicular E C, será el centro del círculo buscado, y no habrá más que describir el círculo, siendo A D B el segmento pedido.

LIBRO TERCERO.

Líneas proporcionales.

162) Definiciones. — Si cuatro longitudes A, B, C, D, son tales, que

$$(^1) \qquad \frac{A}{B} = \frac{C}{D},$$

se dice que las dos primeras son proporcionales á las otras dos, y que la D es *una cuarta proporcional* entre las longitudes A, B, C.

Si se han valuado las longitudes consideradas con una misma unidad de medida, se podrá sustituir en la relación (1), los números por las longitudes que representan, obteniendo así expresiones numéricas que pueden someterse á las reglas y cálculos de la Aritmética.

Sean $a, b, c, d,$ los números que miden las longitudes A, B, C, D, valuadas con la misma unidad, y sustituyendo tendremos

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

de donde

$$d = \frac{b \times c}{a}$$

que da la cuarta proporcional.

163) Cuando tres longitudes A, B, C, son tales, que

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C},$$

de donde

$$B^2 = A \times C$$

se dice que B es *media proporcional* entre las longitudes A y C. Representando con a, b, c, los números que miden estas longitudes, tendremos

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c},$$

y luego

$$b^2 = a \times c. \qquad (*)$$

(*) Una recta A B, está dividida por un punto C, en dos partes proporcionales á dos números 11 y 9, cuando la razón de sus segmentos es igual á la de los números dados.

Dividamos la porción A B de la recta en $11 + 9 = 20$ partes iguales, tomando á partir del punto A, once de estas partes para valor de A C y las nueve restantes para valor de C B, y tendremos

$$\frac{AC}{CB} = \frac{11}{9}$$

Busquemos si existen otros puntos de la recta cuyas distancias á los A y B estén en la misma relación.

Dividamos á A B en $11 - 9 = 2$ partes iguales y llevando, á partir de B, nueve veces una de estas partes, obtendremos un punto D que satisface á la cuestión, pués

$$\frac{AD}{BD} = \frac{11}{9}.$$

Observación. — Observando la manera como hemos obtenido los puntos C y D, se ve que estos son únicos, es decir, que son los únicos puntos de la recta indefinida, cuyas distancias á los A y B, están en la relación $\frac{11}{9}$.

164) Por *cuadrado de una línea* debemos entender el cuadrado del número que la mide; por *producto de*

El punto C, está más cerca del punto B que del A; y el D, se encuentra á la derecha del punto A, pues la razón dada $\frac{11}{9}$ es mayor que la unidad. Si la razón dada, fuera menor que la unidad, D se encontraría á la izquierda de A.

Los puntos C y D que con los A y B, dividen la recta en segmentos proporcionales á números dados, se llaman *puntos conjugados.*

Los puntos conjugados gozan de propiedades importantes, por ejemplo:

Si el punto C, se acerca al punto medio de A B, su punto conjugado D, se aleja al infinito sobre la recta.

Llamando O el punto medio del segmento A B, la distancia de C á este punto será

$$OC = \frac{1}{10} \cdot \frac{AB}{2}$$

y la del punto conjugado D, será

$$OD = OC \times 10 \times 10 = 10 \, \frac{AB}{2}$$

Dividamos, el segmento A B en 200 partes iguales, tomando 101 de estas partes para valor de A C y los 99 restantes, para valor de C B, es decir

$$AC = 101,$$
$$CB = 99,$$

Formando la diferencia $101 - 99 = 2$, dividiremos A B en dos partes iguales y una de estas la llevaremos 99 veces á partir de B, obteniendo en su extremo, un punto D que será el conjugado de C. En efecto:

$$AD = (99 + 2) \times 100 = 10.100,$$
$$BD = 99 \times 100 = 9.900,$$

$$\therefore \quad \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{CB} = \frac{101}{99}.$$

dos líneas, al producto de los números que las miden si han sido valuadas con la misma unidad.

Pero en ese caso, las distancias de los puntos C y D al medio O de A B, son

$$O\,C = \frac{1}{100} \cdot \frac{A\,B}{2}$$

$$O\,D = O\,C \times 100 \times 100 = 100.\ \frac{A\,B}{2}.$$

Si suponemos dividido el segmento A B en 2000 partes iguales, tomando

$$A\,C = 1001,$$
$$C\,B = 999,$$

Llevando la mitad de A B, 999 veces á partir de B, encontraremos el punto D conjugado del C. En efecto

$$A\,D = (999 + 2) \times 1000 = 1.001.000,$$
$$B\,D = 999 \times 1000 = 999.000.$$

$\therefore$

$$\frac{A\,D}{B\,D} = \frac{A\,C}{C\,B} = \frac{1001}{999}.$$

Las distancias de los puntos conjugados C y D al medio de A B, serán

$$O\,C = \frac{1}{1000} \cdot \frac{A\,B}{2}$$

$$O\,D = O\,C \times 1000 \times 1000 = 1000\ \frac{A\,B}{2}$$

Si dividiéramos en 20000 partes el segmento A B, obtendríamos, de la misma manera,

$$O\,C = \frac{1}{10.000} \cdot \frac{A\,B}{2}$$

$$O\,D = O\,C \times 10.000 \times 10.000 = 10.000\ \frac{A\,B}{2}$$

Teorema 74.

165) *Toda línea recta, paralela á uno de los lados de un triángulo, divide á los otros dos lados, en partes proporcionales.*

Observaremos pues, que disminuyendo la distancia del punto C del medio O de A B, como los números

0 1; 0,01; 0,001; 0.0001, etc.

la distancia del conjugado D al mismo punto O, crece como los números

10, 100, 1 000, 10.000, etc.

y se concibe como, acercándose indefinidamente el punto C al punto medio de A B, su conjugado D se aleja al ∞

En general, la relación importante

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{BD},$$

introduciendo el *principio de los signos* en el cual se conviene en que, si se considera un segmento C B, como positivo debe considerarse como negativo el segmento B C y tal que

$$CB - BC = 0,$$

la relación anterior podrá escribirse

$$\frac{AD}{BD} = -\frac{AC}{BC}$$

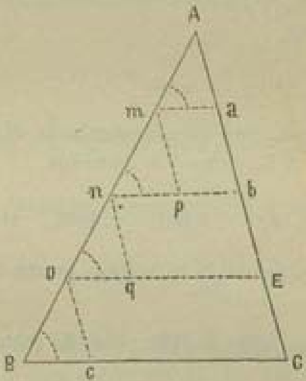
ó también

$$\frac{AD}{AC} : \frac{BD}{BC} = -1$$

se tendrá lo que se llama *razón armónica.*

Sea A B C el triángulo dado y D E la paralela al lado B C.

(Figura 146).



Supongamos que A D y D B tengan una común

Los puntos C, D, son conjugados armónicos de los A, B, y recíprocamente; y en conjunto forman un *sistema armónico ó puntual armónica.*

Considerando la relación anterior se deducen las importantes consecuencias:

1.ª *Cuando cuatro puntos están en razón armónica, el punto medio de dos puntos conjugados, está siempre, fuera del segmento formado por los otros dos.*

2.ª *Cuando uno de los cuatro puntos está al infinito, su conjugado armónico está en el punto medio de los otros dos.*

1.ª—Tomando la relación

$$\frac{AD}{BD} = -\frac{AC}{BC}$$

y considerando solo su valor absoluto, veremos, puesto que el medida contenida 3 veces en la primera y 1 en la segunda. Entonces

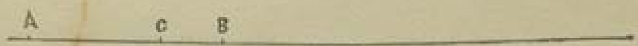
$$(1) \qquad \frac{A\,D}{D\,B} = \frac{3}{1}.$$

Ahora, dividiendo á A B en cuatro partes iguales y llevando por los puntos de división paralelas á los lados B C y A C formaremos, los triángulos A $m\,a$, $m\,n\,p$, n D q, D B c, que son iguales entre sí por tener los lados

$$A\,m = m\,n = n\,D = D\,B;$$

---

punto D está fuera del segundo A B, que el punto conjugado C



estará mas cerca de B que de A, pues siendo

$$A\,D > B\,D,$$

será también

$$A\,C > B\,C.$$

2.ª—Si el punto D se aleja al infinito sobre la recta, la razón $\frac{A\,D}{B\,D}$ tiende á valer la unidad y entonces

$$\frac{A\,C}{B\,C} = -1$$

de donde

$$A\,C = -B\,C$$

es decir, el punto C, ocupa el punto medio del segmento A B.

los ángulos en B, D, n y m, iguales por correspondientes y los otros ángulos respectivamente iguales por tener sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido. La igualdad de estos triángulos nos da,

$$\mathrm{A}a = mp = nq = \mathrm{D}c,$$

pero

$$mp = ab,\ nq = b\mathrm{E},\ \mathrm{D}c = \mathrm{EC},$$

luego

$$\mathrm{A}a = ab = b\mathrm{E} = \mathrm{EC},$$

y entonces

$$(^2) \qquad \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EC}} = \frac{3}{1},$$

y comparando las razones (^{1}) y (^{2}), resulta

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EC}}$$

Supongamos ahora, que A D y D B sean inconmensurables. Dividamos á D B, por ejemplo, en 100 partes iguales, y supongamos que una de estas partes esté contenida 180 veces en A D más un resto menor que una de estas partes. La razón $\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}$, estará pués, comprendida entre $\frac{180}{100}$ y $\frac{181}{100}$. Haciendo la misma construcción que en el caso precedente, se encontrará que E C contiene 100 veces una cierta unidad de medida y que A E la contiene 180 veces más un resto menor que una de estas partes y que por consiguiente la razón $\frac{AE}{EC}$ estará comprendida entre $\frac{160}{100}$ y $\frac{161}{100}$ y luego

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

Corolario I. — De la proporción:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC},$$

agregando la unidad á ambos miembros resulta

$$\frac{AD}{DB} + 1 = \frac{AE}{EC} + 1,$$

$$\frac{AD + DB}{DB} = \frac{AE + EC}{EC},$$

y luego

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}.$$

y análogamente

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}.$$

Corolario II. — *Cuando un sistema de rectas paralelas* L, L', L'', *cortan á dos rectas* AC, DF, *las dividen en segmentos proporcionales.*

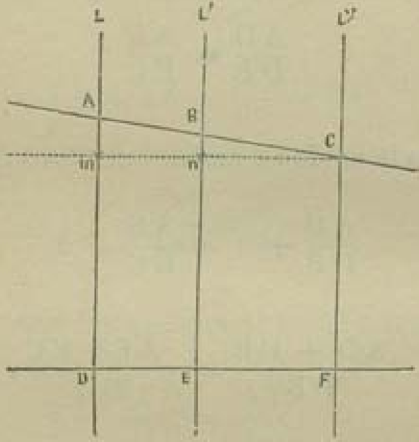
En efecto, tracemos la recta Cm paralela á DF, y tendremos

$$\frac{CB}{BA} = \frac{Cn}{nm},$$

pero

$$Cn = FE, \; nm = ED,$$

(Figura 147).



por paralelas comprendidas entre paralelas, luego

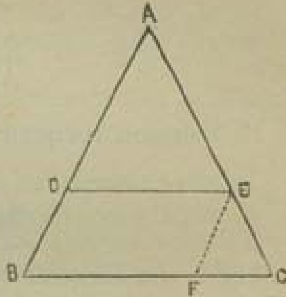
$$\frac{CB}{BA} = \frac{FE}{ED}$$

Teorema 75.

166) *Toda línea recta, que divida dos lados de un triángulo en segmentos proporcionales, es paralela al tercer lado.*

Sea A B C el triángulo dado y D E la recta que corta á los lados A B, A C, en partes proporcionales, teniendo

(Figura 148.)



$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC},$$

la recta D E será paralela á B C.

En efecto, trazando por el punto D una paralela á B C, esta deberá contener al punto E que divide á A C en segmentos proporcionales á los A D y D B, y por consiguiente la paralela trazada del punto D coincide con D E.

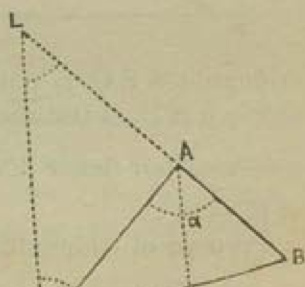
Teorema 76.

167) *La bisectriz de un ángulo de un triángulo, divide al lado opuesto, en dos segmentos proporcionales á los lados adyacentes.*

Sea A B C el triángulo dado y A D la bisectriz del ángulo α.

Prolonguemos el lado A B y por el punto C, tracemos una paralela C L á la bisectriz A D.

(Figura 149.)



En el triángulo B L C, tenemos

$$\frac{AB}{AL} = \frac{BD}{DC},$$

pero el triángulo A L C es

isósceles por tener los ángulos $C = L = \frac{\alpha}{2}$, y dará

$$A \quad = AC$$

$$\therefore \qquad \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}.$$

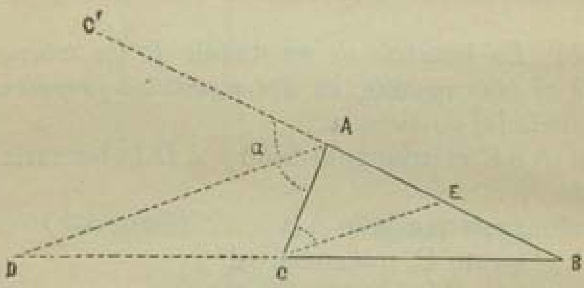
El teorema recíproco es evidente

Teorema 77.

168) *La bisectriz de un ángulo exterior á un triángulo, encuentra á la prolongación del lado opuesto en un punto, cuyas distancias á los extremos de este lado, son proporcionales á los lados adyacentes.*

Siendo AD la bisectriz del ángulo exterior α al

(Figura 150.)



triángulo ABC; si por el punto C trazamos CE paralela á AD, el triángulo ACE, que así se forma, es isósceles por tener los ángulos $E = C = \frac{\alpha}{2}$ y dá $AE = AC$.

Pero en el triángulo BAD tenemos

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AE}; \therefore \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

Ejercicios.

1.º—¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuyas distancias á dos puntos dados son proporcionales á dos longitudes dadas, *m* y *n*?

2.º—La línea recta que liga los puntos medios de dos lados de un triángulo, es paralela al tercer lado é igual á su mitad.

3.º—Las líneas rectas que ligan los puntos medios de los lados consecutivos de un cuadrilátero, forman un paralelogramo, ¿en qué casos este paralelogramo es un rectángulo, un losange ó un cuadrado?

4.º—Calcular, con una aproximación de 0 001, cada uno de los segmentos, que las bisectrices de los ángulos de un triángulo determinan sobre sus lados, los que tienen respectivamente 12^m, 15^m y 18^m de longitud.

5.º—¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos de un plano que están igualmente iluminados por dos focos (puntos) situados en este plano, cuando sus intensidades, á la unidad de distancia, son proporcionales á dos números dados? (En Física se demuestra que, *la intensidad de la luz que proviene de un punto luminoso, varía en razón inversa del cuadrado de la distancia).*

Similitud.

169) DEFINICIONES.—Dos polígonos que tienen el mismo número de lados *son semejantes*, cuando sus ángulos son respectivamente iguales y los lados adyacentes á ángulos iguales son proporcionales y están dispuestos en el mismo orden.

Se dice, que dos puntos, dos lados ó dos ángulos son *homólogos*, cuando se corresponden en dos figuras semejantes. Entonces los vértices de dos ángulos iguales serán puntos homólogos, y análogamente, las diagonales que unen dos vértices homólogos serán líneas homólogas.

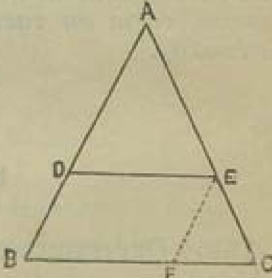
Se llama *razón de similitud* de dos polígonos, á la razón constante de dos lados homólogos. Cuando esta razón es igual á la unidad, los dos polígonos serán iguales, puesto que tendrán sus lados y ángulos respectivamente iguales y dispuestos en el mismo orden, pudiendo hacerlos coincidir por superposición.

Teorema 78.

170) *Cuando se corta un triángulo, por una recta paralela á uno de sus lados, se forma otro triángulo semejante al primero.*

Sea A B C el triángulo dado, y D E la recta, que siendo paralela al lado B C corta á los otros dos en los puntos D y E, formando el triángulo A D E, que será semejante al propuesto.

(Figura 151.)



En efecto, estos dos triángulos tienen común el ángulo A y además

ángulo A D E = B,
» A E D = C.

por correspondientes. Por otra parte, siendo D E paralela á B C se tendrá, que

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}.$$

y si trazamos por E, la recta E F paralela á A B, se tendrá

$$\frac{AD}{AB} = \frac{BF}{BC};$$

pero D E = B F, por partes de paralelas comprendidas entre paralelas, luego

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC},$$

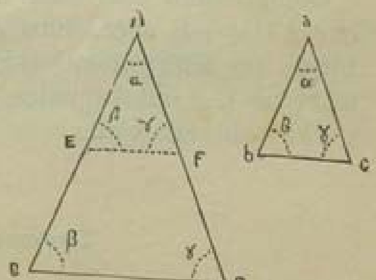
y los triángulos A B C, A D E, que tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos proporcionales, son semejantes.

Teorema 79.

171) *Dos triángulos que tienen sus ángulos respectivamente iguales, son semejantes.*

Sean A B C y *a b c* los dos triángulos que tienen sus ángulos respectivamente iguales.

(Figura 152.)



Si superponemos el triángulo *a b c* sobre A B C, haciendo coincidir los lados del ángulo α, el triángulo *a b c*, tomará la posición A E F, E F será paralela á B C y el triángulo *a b c* será semejante al A B C.

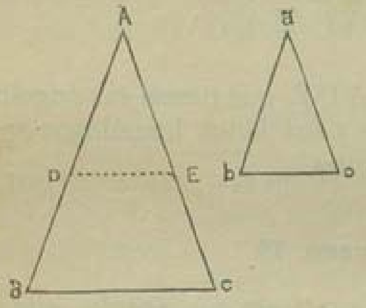
Corolario — *Dos triángulos que tienen dos ángulos respectivamente iguales, son semejantes.*

Teorema 80.

172) *Dos triángulos, que tienen sus lados homólogos proporcionales son semejantes.*

Siendo ABC y abc los dos triángulos dados, se tendrá

(Figura 153.)



$$(^1)\ \frac{ab}{AB}=\frac{ac}{AC}=\frac{bc}{BC}$$

Tomemos sobre AB una parte AD $= ab$ y tracemos DE paralela á BC, formando así, el triángulo ADE que es semejante al ABC, luego

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}.$$

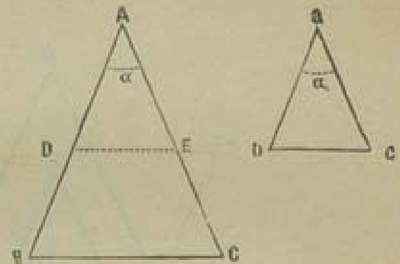
Comparando esta serie de razones, y observando que AD $= ab$, sacaremos AE $= ac$, y DE $= bc$. Luego los triángulos ADE y abc son iguales por tener sus tres lados iguales, y por consiguiente ABC y abc son semejantes

Teorema 81.

173) *Dos triángulos que tienen un ángulo igual y proporcionales los lados que lo forman, son semejantes.*

Sean ABC y abc, los dos triángulos que cumplen las condiciones

(Figura 154.)



$$A = a = \alpha, \frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac}$$

Sobre AB, tomemos

$$AD = ab,$$

y por D, tracemos la recta DE paralela á BC. Los triángulos ABC y ADE son semejantes (78), pero los lados ab, ac, del triángulo abc son proporcionales á los AB, AC del triángulo ABC, por hipótesis; luego serán también proporcionales á los lados AD, AE, del triángulo ADE, es decir, que

$$\frac{AD}{ab} = \frac{AE}{ac}$$

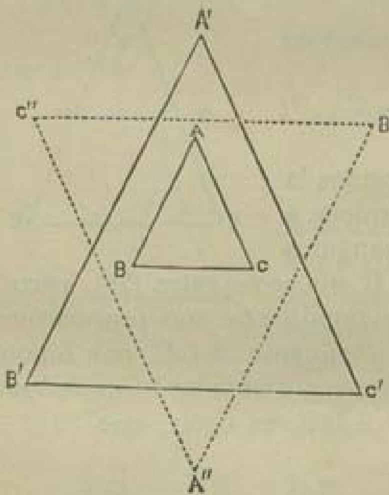
pero, $AD = ab$, luego $AE = ac$, y los triángulos ADE y abc, que además tienen igual el ángulo formado por estos lados, son iguales entre sí. Por consiguiente, los triángulos ABC y abc son semejantes.

Teorema 82.

174) *Dos triángulos, que tienen sus lados respectivamente paralelos ó perpendiculares, son semejantes.*

1.° Si los lados del triángulo A' B' C', son respectivamente paralelos á los lados del triángulo A B C

(Figura 155.)



ó del A'' B'' C'', dirigidos de dos en dos, en el mismo sentido ó en sentido opuesto, los ángulos de estos triángulos serán

$$A = A' = A'',$$

$$B = B' = B'',$$

$$C = C' = C''$$

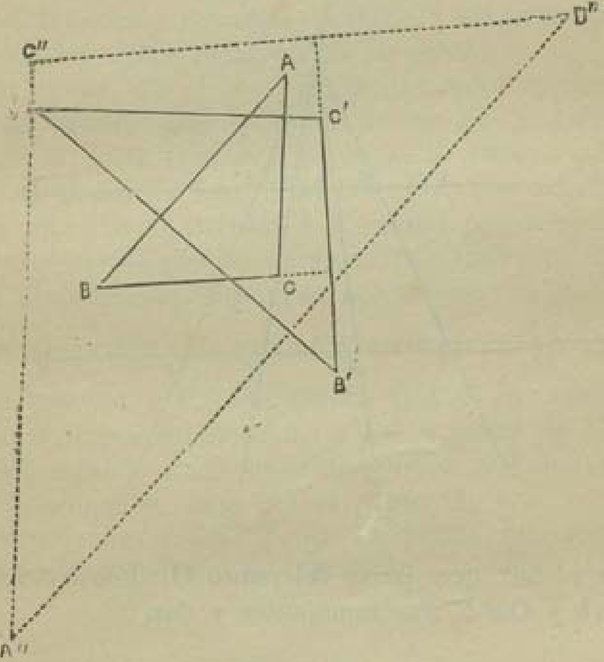
y los triángulos son semejantes. (79)

2.° Si los lados del triángulo A' B' C', son respectivamente perpendiculares á los lados del A B C, formarán los ángulos

$$A = A',$$
$$B = B',$$
$$C = C',$$

y los dos triángulos serán semejantes. (79)

(Figura 156.)



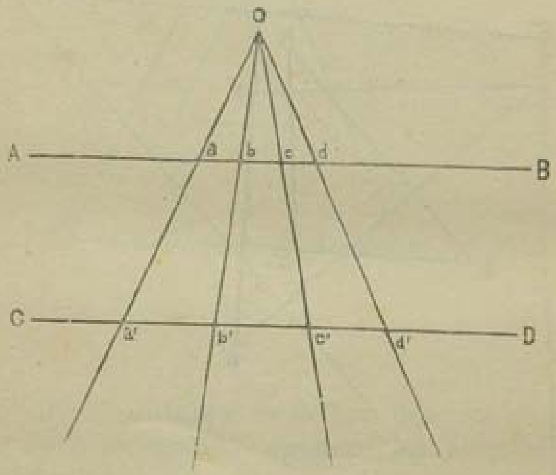
Para generalizar este resultado, bastará observar que todo triángulo A'' B'' C'' cuyos lados sean perpendiculares á los lados del A' B' C', tendrá sus lados paralelos á los del triángulo A B C, y luego serán semejantes.

Teorema 83.

175) *Si por un punto, se traza un haz de rectas que corte á dos rectas paralelas, los segmentos que se determinan, son proporcionales.*

Sean A B, C D, dos rectas paralelas encontradas

(Figura 157.)



por el haz que parte del punto O. Los triángulos Oab y $Oa'b'$ son semejantes y dan

$$\frac{ab}{a'b'} = \frac{Ob}{Ob'};$$

los triángulos Obc y $Ob'c'$, semejantes entre sí, dan

$$\frac{Ob}{Ob'} = \frac{bc}{b'c'},$$

luego

$$\frac{a\,b}{a'\,b'} = \frac{b\,c}{b'\,c'};$$

y análogamente, tendríamos

$$\frac{a\,b}{a'\,b'} = \frac{b\,c}{b'\,c'} = \frac{c\,d}{c'\,d'} \qquad (*)$$

Recíprocamente; *si las rectas* $a\,a'$, $b\,b'$, $c\,c'$, *dividen á las rectas paralelas* A B, C D, *en partes proporcionales, deben concurrir en un punto.*

En efecto, sea O el punto de intersección de dos de las rectas, por ejemplo, de las $b\,b'$ y $d\,d'$; tirando la recta O c, esta prolongada deberá pasar por el punto c'. Las rectas O b, O c, O d, según el teorema anterior, dividen á las rectas paralelas A B, C D, en partes proporcionales. Por tanto, la recta O C prolongada, debe pasar por el punto c' que por hipótesis divide á la recta $b'\,d'$ en la razón $\frac{b\,c}{c\,d}$ pués sólo hay un modo de dividir á $b'\,d'$ en dos segmentos proporcionales á $b\,c$ y $b\,d$, á partir de b'.

Del mismo modo demostraríamos que la recta $a\,a'$ prolongada, pasa por el punto O.

OBSERVACIÓN.—El punto O, puede encontrarse entre las paralelas A B, C D.

(*) DEFINICIÓN — Si de un punto O del plano que contiene un sistema armónico de cuatro puntos, A, C, B, D, se tiran rectas á estos puntos, se obtiene lo que se llama un *haz armónico* de cuatro rectas, que se llaman *rayos* del haz; el punto O se llama *vértice* del haz y los rayos O C, O D, son *rayos conjugados armónicos* de los O A, O B.

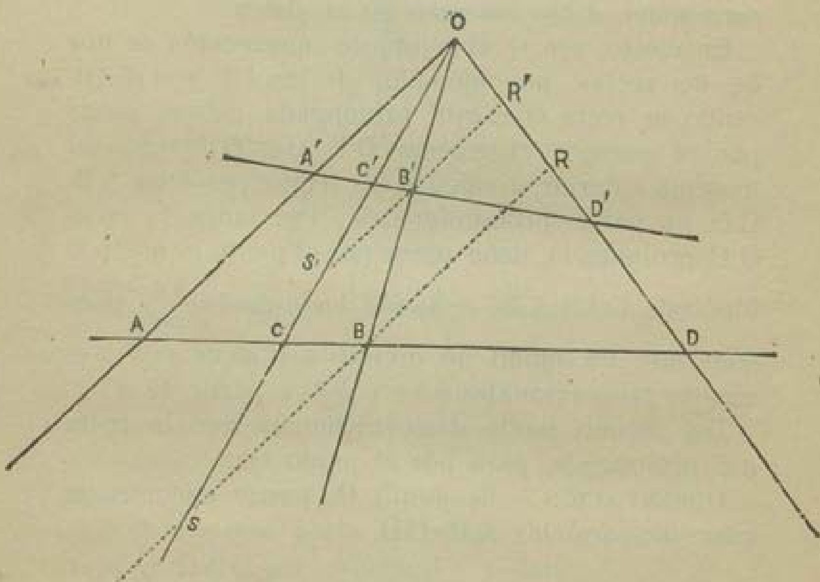
OBSERVACIÓN.—Los ángulos formados, por rectas paralelas ó perpendiculares respectivamente son iguales ó suplementarios. En el caso presente, los

---

Teorema 1.

Si de un punto B de la puntual A, B, C, D, se traza una paralela al rayo O A que pasa por su punto conjugado, se obtiene una puntual armónica R B S ∞ que tiene un punto en el infinito.

Para demostrarlo, nos bastará probar que B R = S B.



Como los puntos A, C, B, D forman una puntual armónica, se tendrá

$$\frac{AD}{BD} = -\frac{AC}{BC},$$

ó bién

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{CB},$$

pués $-BC = CB$, según al principio de los signos.

ángulos formados por los lados paralelos ó perpendiculares respectivamente deben ser de dos en dos de la misma especie, es decir, ambos agudos ó ambos

---

En los triángulos semejantes A D O y B D R, se tiene

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AO}{BR}, \quad \text{luego} \quad \frac{AC}{CB} = \frac{AO}{BR},$$

pero en los triángulos semejantes A C O y C B S

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AO}{BS},$$

luego

$$\frac{AO}{BR} = \frac{AO}{BS},$$

$$\therefore \quad BR = BS$$

y siendo B el punto medio de R S, su conjugado armónico está en el infinito, es decir, en el punto de encuentro de R S con el rayo paralelo O A.

Teorema 2.

Toda transversal que corta á un haz armónico, determina en los puntos de encuentro, una puntual armónica.

Sean A', C', B, D', los puntos de encuentro de la transversal con los rayos O A, O C, O B, O D de un haz armónico.

Por el punto B', tracemos una paralela al rayo O A, la que encontrará á los rayos conjugados O C y O D en los puntos S' y R'.

Los triángulos semejantes D' B' R' D' A' O, dan

$$\frac{AD'}{B'D'} = \frac{AO}{B'R'};$$

los triángulos semejantes O A' C' y S' C' B', dan

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{AO}{SB'},$$

obtusos, pués de lo contrario, la suma de los seis ángulos de los dos triángulos sería mayor que cuatro ángulos rectos, lo que es absurdo.

---

pero $$B'R' = S'B',$$

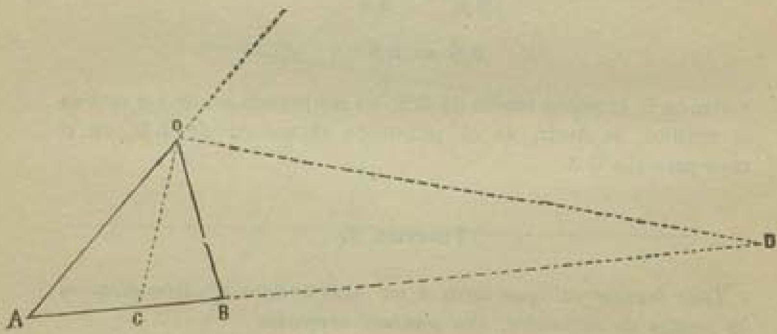
$\therefore$

$$\frac{A'D'}{B'D'} = \frac{A'C'}{C'B'} = -\frac{A'C'}{B'C'}.$$

Teorema 3.

Las bisectrices de un ángulo de un triángulo y del ángulo externo adyacente, forman con los lados del ángulo un haz armónico.

En efecto, sea O A B el triángulo; O C, O D, las bisectrices.



Sabemos que la bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales á los lados adyacentes, luego

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AO}{BO};$$

por otra parte, siendo O D bisectriz del ángulo externo, dá

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AO}{BO},$$

$\therefore$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{CB} = -\frac{AC}{BC}.$$

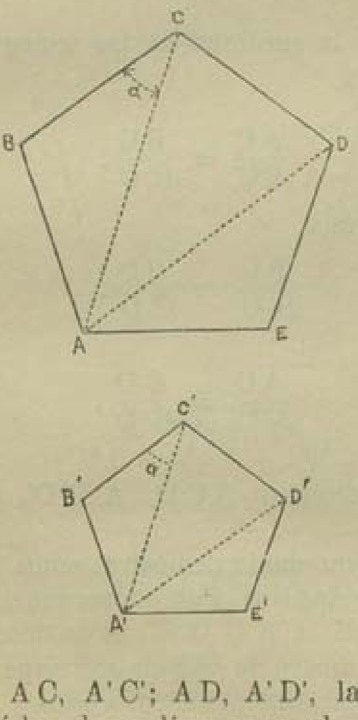
y las rectas O A, O C, O B, O D, forman un haz armónico.

Teorema 84.

176) *Dos polígonos semejantes, pueden descomponerse en un mismo número de triángulos respectivamente semejantes y semejantemente colocados.*

Sean A B C D E, A' B' C' D' E', dos polígonos semejantes; de sus vértices A, A' tiremos las diagonales

(Figura 158.)



homólogas A C, A' C'; A D, A' D', las cuales descomponen á los dos polígonos en el mismo número de triángulos semejantemente colocados.

1.° — Los triángulos A B C y A' B' C', son semejantes pués tienen, por la similitud de los dos polígonos. $B = B'$ y $\frac{A\,B}{A'\,B'} = \frac{B\,C}{B'\,C'}$, y sus otros dos ángulos son iguales.

2.º—Los triángulos A C D, A' C' D', son también semejantes por tener un ángulo igual comprendido entre lados porporcionales.

En efecto, estos triángulos tienen iguales los ángulos,

$$C - \alpha = C' - \alpha,$$

y además, por la similitud de las triángulos A B C A' B' C', se tiene

$$\frac{A\,C}{A'\,C'} = \frac{B\,C}{B'\,C'};$$

pero, por hipótesis

$$\frac{B\,C}{B'\,C'} = \frac{C\,D}{C'\,D'},$$

$$\therefore \quad \frac{A\,C}{A'\,C'} = \frac{C\,D}{C'\,D'},$$

y los dos triángulos A C D, A' C' D', son semejantes.

3.º—Del mismo modo demostraríamos la similitud de los otros triángulos. Por consecuencia, los polígonos A B C D E, A' B' C' D' E', están descompuestos en un mismo número de triángulos respectivamente semejantes y semejantemente colocados.

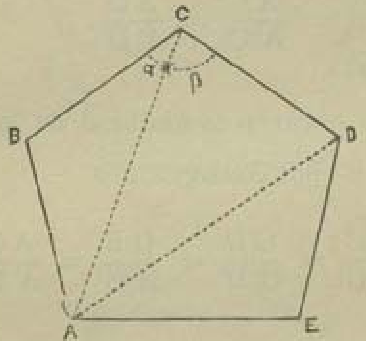
177) Corolario.—Las diagonales homólogas de dos polígonos semejantes, son proporcionales á los lados homólogos.

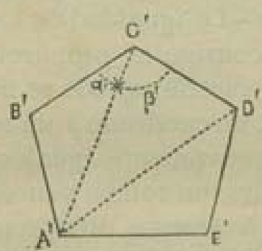
Teorema 85.

178) *Dos polígonos compuestos de un mismo número de triángulos semejantes y semejantemente colocados, son semejantes.*

Sean A B C D E, A' B' C' D' E', los dos polígonos

(Figura 159.)





compuestos de un mismo número de triángulos semejantes y semejantemente colocados.

Los ángulos de los dos polígonos son respectivamente iguales, así

$$B = B', \; C = C' = \alpha + \beta \ldots \text{ etc.},$$

porque los triángulos componentes son semejantes y semejantemente colocados.

Los lados de estos polígonos, son proporcionales respectivamente:

En efecto, la razón de similitud de los dos triángulos ABC y $A'B'C'$ es, $\frac{AC}{A'C'}$ que es la misma en los triángulos ACD y $A'C'D'$ y entonces

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AD}{A'D'},$$

pero $\frac{AD}{A'D'}$ es la razón de similitud de los triángulos ADE, $A'D'E'$, por consiguiente:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AD}{A'D'}$$

y los dos polígonos dados son semejantes.

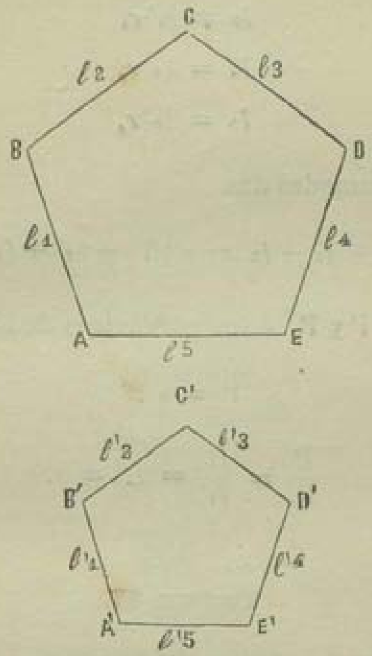
OBSERVACIÓN.—La igualdad de los ángulos de dos triángulos lleva consigo la proporcionalidad de sus lados, lo cual no sucede cuando se trata de dos polígonos. En efecto, un cuadrado y un rectángulo tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados no son proporcionales; un rombo y un cuadrado tendrán sus lados respectivamente proporcionales y sin embargo, sus ángulos no son respectivamente iguales.

Teorema 86.

179) *Los perímetros de los polígonos semejantes, son proporcionales á los lados homólogos.*

Sean A B C D E, A' B' C' D' E' los dos polígonos semejantes, y representemos, para abreviar, los lados

(Figura 160.)



del primero, por l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, y los del segundo, por l'_1, l'_2, l'_3, l'_4, l'_5.

Siendo semejantes los polígonos se tendrá

$$(1)\quad \frac{l_1}{l_1'} = \frac{l_2}{l_2'} = \frac{l_3}{l_3'} = \frac{l_4}{l_4'} = \frac{l_5}{l_5'} = r,$$

r es la razón de similitud

De los (¹) se deducen las igualdades

$$l_1 = l_1' r,$$
$$l_2 = l_2' r,$$
$$l_3 = l_3' r,$$
$$l_4 = l_4' r,$$
$$l_5 = l_5' r,$$

las cuales, sumadas dán

$$l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 = r\,(l_1' + l_2' + l_3' + l_4' + l_5')$$

y llamando P y P' á los perímetros de los polígonos, será

$$P = r\,P'$$

de donde

$$\frac{P}{P'} = \frac{l_1}{l_1'} = \ldots = r.$$

Teorema 87.

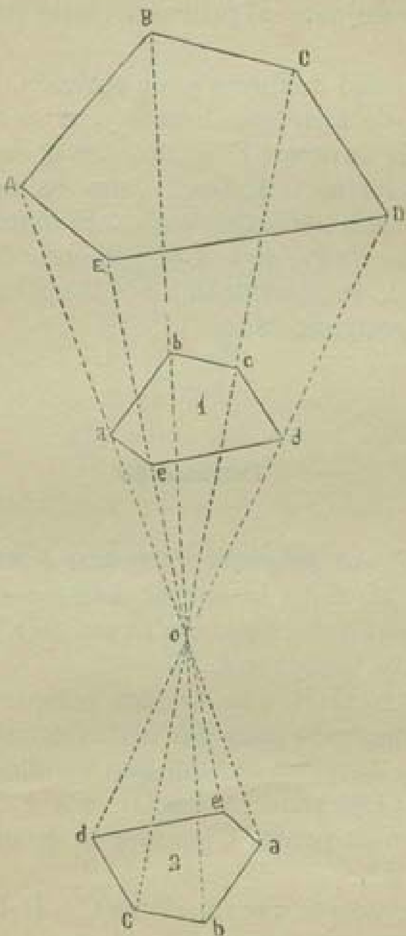
Si de todos los vértices de un polígono A B C D E *se trazan rectas que pasen por un punto* O *de su plano, y á partir de este punto se toman, de uno y otro lado, sobre estas rectas, longitudes* oa, ob, oc, od, oe, *tales que*

$$\frac{OA}{oa} = \frac{OB}{ob} = \frac{OC}{oc} = \ldots = r$$

los polígonos que se forman trazando las rectas ab, bc, cd, de, ea, *son semejantes al propuesto.*

De la hipótesis resulta, que los lados de los polígonos 1, 2, son respectivamente paralelos á los lados

(Figura 161.)



del polígono A B C D E; los ángulos son iguales respectivamente por tener sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido ó en sentido contrario, luego los polígonos son semejantes.

El polígono 1 semejante al propuesto, está también semejantemente colocado, mientras que el polígono 2, también semejante al propuesto, está inversamente colocado.

A la similitud de forma y de posición, *Chasles* dió el nombre de *homotecia* directa y en el otro caso, el de *homotecia* inversa. El punto O es el *centro de similitud*, y las rectas O A, O a, . . . son los *radios vectores* de los puntos homólogos A, a,... Si se hace variar la *razón de similitud r*, de O á ∞, y la posición del centro de similitud, se obtendrán todos los polígonos homotécicos al polígono dado.

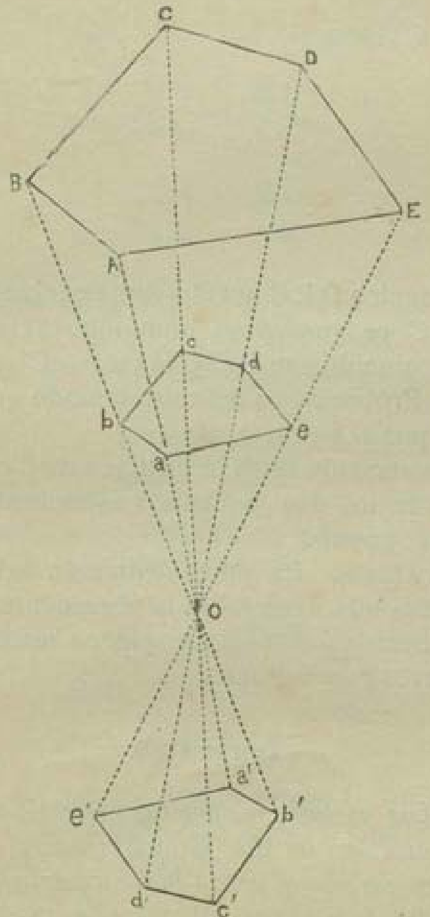
Teorema 88.

180) *Si dos polígonos semejantes tienen sus lados homólogos paralelos, las rectas determinadas por dos vértices homólogos concurren en un solo punto y los polígonos son homotécicos.*

Sean A B C D E, $a\,b\,c\,d\,e$, dos polígonos semejantes y supongamos que sus lados homólogos sean paralelos y dirigidos en el mismo sentido ó en sentido contrario. Trazando las rectas A a y B b, estas se cortarán en un punto O por el cual deben pasar, las C c, D d, E e.

Para demostrar que las rectas C c, D d, E e, pasan por el punto de encuentro de las A a, B b, tracemos las rectas del punto O á los c y C y observemos, desde luego, que los triángulos O A B y O $a\,b$ son semejantes por tener paralelos los lados A B y *a b*. Los triángulos O B C y O *b c* son también semejantes

(Figura 102.)



por tener los ángulos O B C = O *b c* comprendidos entre lados proporcionales.

A causa de la similitud de los triángulos O A B y Oab, tendremos

$$\frac{OB}{ob} = \frac{AB}{ab},$$

pero por la hipótesis,

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc},$$

$$\therefore \quad \frac{OB}{ob} = \frac{BC}{bc},$$

y los triángulos O B C y Obc son semejantes y el ángulo B O C es igual á su homólogo bOc; luego la recta Oc coincide con OC y la recta cC pasa por el punto O. Probaríamos del mismo modo que la recta Dd pasa por el punto O, etc.

La demostración sería la misma, en el caso en que los lados de los dos polígonos estuvieran dirigidos en sentido opuesto.

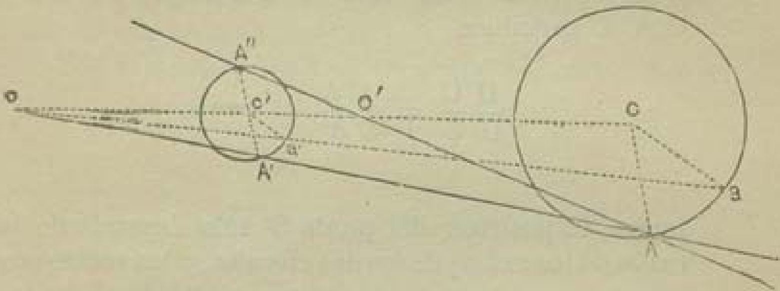
Observación. La nueva definición de la similitud de dos polígonos, tiene sobre la precedente, la ventaja de ser aplicable á dos figuras planas terminados por líneas curvas cualesquiera.

Teorema 89.

181) *Las rectas que unen las extremidades de dos radios paralelos de dos circunferencias de círculo situadas en un plano, pasan por un punto que se llama* CENTRO DE SIMILITUD DIRECTA *ó* INVERSA *según que los radios estén dirigidos en un mismo sentido ó en sentido contrario.*

Considerando los radios C A y C' A', la recta A A'

(Figura 163.)



que los liga, pasará por un punto O de la recta C C', que es el *centro de similitud directa.*

En efecto, los triángulos semejantes OAC y OA'C' dán

$$\frac{O\,C}{O\,C'} = \frac{C\,A}{C'\,A'};$$

los triángulos semejantes O C a y O C' a' dán

$$\frac{O\,C}{O\,C'} = \frac{C\,a}{C'\,a'};$$

luego

$$\frac{C\,A}{C'\,A'} = \frac{C\,a}{C'\,a'} = \text{const.}$$

y la recta $a\,a'$ pasará por el punto O. Sucediendo lo mismo, para toda recta que ligue los extremos de dos radios paralelos y dirigidos en el mismo sentido, el punto O estará fijo sobre la recta C C' y su posición solo depende, de la razón de los radios de los dos círculos.

Consideremos los radios C A y C' A'' paralelos y dirigidos en sentido contrario y tiremos la recta A A''; esta encontrará á la C C' en un punto O' fijo, que es el *centro de similitud inversa.*

En efecto, de la similitud de los triángulos O' A C y O' A'' C' se deduce

$$\frac{O'\,C}{O'\,C'} = \frac{C\,A}{C'\,A''} = \text{const.}$$

Luego, la posición del punto O' solo depende de la razón de los radios de los dos círculos, y las rectas que liguen los extremos de los radios paralelos y dirigidos en sentido contrario, pasarán todas por este punto.

Observación — *Dos circunferencias de circulo, cualesquiera* C, C', *son dos figuras á la vez, homotécicas directas y homotécicas inversas.*

En efecto, á cada punto A de la primera corresponde un punto A' de la segunda, tal que

$$\frac{O\,C}{O\,C'} = \frac{C\,A}{C'\,A'} = \frac{O\,A}{O\,A'} = \text{constante.}$$

Del mismo modo, á cada punto A de la primera corresponde un punto A' de la segunda, tal, que

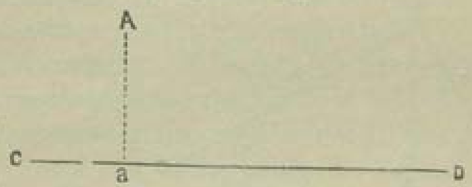
$$\frac{O'\,C}{O'\,C'} = \frac{C\,A}{C'\,A''} = \frac{O'\,A}{O'\,A''} = \text{constante.}$$

Relaciones métricas.

DEFINICIONES — *Se llama proyección ortogonal de un punto sobre una recta, al pié de la perpendicular tirada del punto á la recta.*

Sea C D una recta y A un punto del plano que la

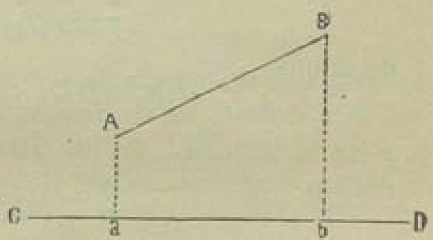
(Figura 164.)



contiene. Tirando de A la perpendicular A a, el punto a es la proyección ortogonal del punto A sobre la recta C D.

Si A B es una recta y proyectamos ortogonalmente sus extremos A, B, sobre la recta indefinida C D, la distancia ab de sus proyecciones se llama la proyección de A B sobre C D.

(Figura 165.)



Teorema 90.

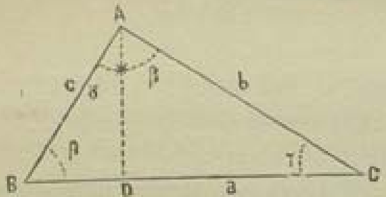
182) *Si del vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo, se tira una perpendicular sobre la hipotenusa, esta divide al triángulo dado, en otros dos triángulos rectángulos semejantes entre sí y al total;* teniéndose:

1.° — *Cada cateto del triángulo propuesto, es medio proporcional entre la hipotenusa y el segmento adyacente á este lado.*

2.° — *La perpendicular es media proporcional entre los dos segmentos en que divide á la hipotenusa.*

1.°—Sea A B C el triángulo rectángulo en A, y A D la perpendicular tirada de A sobre la hipotenusa B C.

(Figura 166.)



Siendo el triángulo A B C, rectángulo en A, debe tenerse

$$\beta + \gamma = 1 \text{ rt.}$$

y la simple inspección de la figura nos dice, que los triángulos A B C, A B D y A D C son semejantes por tener sus ángulos respectivamente iguales.

De la similitud de los triángulos A B C y A B D, resulta

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{\mathrm{BD}},$$

de donde

$$c^2 = a \times \mathrm{BD}; \; \ldots\ldots \quad (^1)$$

y de la similitud de los triángulos A B C y A D C, resulta

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{\mathrm{DC}},$$

$$\therefore \quad b^2 = a \times \mathrm{DC} \; \ldots\ldots \quad (^2)$$

Las relaciones (¹) y (²) nos dicen pués, que cada cateto de un triángulo rectángulo, es medio proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.

2.º—De la similitud de los triángulos A B D y A D C se deduce

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}$$

de donde

$$\overline{AD}^2 = BD \times DC.$$

La cual dice: que la perpendicular tirada del vértice del ángulo recto de un triángulo, rectángulo sobre su hipotenusa, es media porporcional entre los, dos segmentos que sobre ella determina.

183) COROLARIO.—Si trazamos el círculo circunscrito al triángulo rectángulo A B C, su hipotenusa será un diámetro; sus catetos, cuerdas del mismo y el teorema precedente nos dá las consecuencias siguientes:

1.º — *Toda cuerda es media proporcional entre el diámetro que pasa por una de sus extremidades y su proyección sobre el mismo diámetro.*

2.º — *La perpendicular tirada del extremo de una cuerda sobre el diámetro que pasa por el otro extremo, es media proporcional entre los dos segmentos del diámetro.*

Teorema 91.

184) *El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es igual á la suma de los cuadrados de sus catetos.*

Sea A B C el triángulo dado, rectángulo en A.

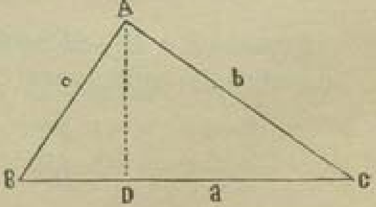
Según las relaciones (90) (¹) y (²), tenemos

(¹) ... $c^2 = a \times BD$,

(²) ... $b^2 = a \times DC$,

y sumando miembro á miembro, resulta

(Figura 167.)



$$c^2 + b^2 = a\,(\mathrm{BD} + \mathrm{DC}),$$

pero

$$\mathrm{BD} + \mathrm{DC} = a,$$

$$\therefore \qquad (^3) \;\ldots\ldots\ldots\; a^2 = b^2 + c^2$$

Corolario I.—La relación (3) dá

$$b^2 = a^2 - c^2, \text{ ó también } c^2 = a^2 - b^2.$$

Luego, *el cuadrado de un cateto de un triángulo rectángulo, es igual al cuadrado de la hipotenusa menos el cuadrado del otro cateto.*

Observación.—Podemos pués, calcular uno cualquiera de los lados de un triángulo rectángulo cuando se den los otros dos lados

1.° Sea

$$b = 4^{\mathrm{m}},$$
$$c = 3^{\mathrm{m}},$$

La fórmula (3) nos dará para valor de la hipotenusa

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5^{\mathrm{m}}.$$

2.°—Sea

$$a = 10^{\mathrm{m}},$$
$$b = 8^{\mathrm{m}},$$

el cateto c, será dado por la fórmula

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6^{\mathrm{m}}$$

Corolario II.—Si se dividen entre sí, miembro á miembro, las relaciones (1) y (2), se tiene

$$\frac{c^2}{b^2} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}},$$

luego: *en un triángulo rectángulo, los cuadrados de los catetos están entre sí, como sus proyecciones sobre la hipotenusa.*

Corolario III.—Si se dividen ambos miembros de las relaciones (1) y (2) por a^2 resulta

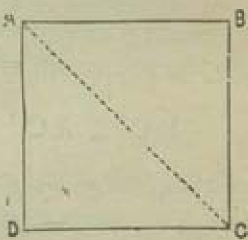
$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{\text{BD}}{a},$$

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{\text{DC}}{a},$$

luego, *en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de un cateto, es al cuadrado de la hipotenusa, como su proyección sobre esta, es á la misma hipotenusa.*

Corolario IV.—Si se considera un cuadrado ABCD, y su diagonal AC, se tendrá, en el triángulo ABC, que es rectángulo é isósceles.

(Figura 168.)



$$\overline{\text{AC}}^2 = \overline{\text{AB}}^2 + \overline{\text{BC}}^2 = 2\,\overline{\text{AB}}^2$$

$$\therefore \quad \text{AC} = \text{AB}.\sqrt{2}$$

y como $\sqrt{2}$ es un número inconmensurable, resulta:

Que la diagonal y el lado de un cuadrado, son dos líneas inconmensurables.

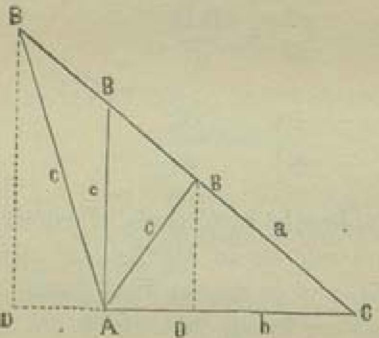
Teorema 92.

185) *En todo triángulo, el cuadrado de un lado opuesto á un ángulo agudo, es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, disminuida del doble*

producto de uno de estos, por la proyección que sobre él forma el otro.

Sea A B C el triángulo en el cual A B es el lado opuesto al ángulo agudo C.

(Figura 169.)



El triángulo A B C, podrá ser uno de los tres de la figura y al proyectar el lado B C sobre el A C, la proyección caerá sobre A C, pudiendo ser

$$DC < AC, \quad DC = AC, \quad DC > AC.$$

1.^r^ Caso $DC < AC$, se tiene $AD = AC - DC$,
2.° » $DC = AC$, » » $AD = AC - DC$,
3.^r^ » $DC > AC$, » » $AD = DC - AC$.

Si formamos el cuadrado de A D, obtendremos para los tres casos

$$(^1) \;\ldots\; \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{DC}^2 - 2\,AC \times DC.$$

En el triángulo B D C, rectángulo en D, se tiene

$$(^2) \;\ldots\; \overline{DB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{DC}^2,$$

y en el A D B, también rectángulo,

$$\overline{AB}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{AD}^2,$$

y sustituyendo en esta, los valores (1), (2), resultará para los tres casos,

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2AC \times DC,$$

en la cual D C es la proyección del lado B C sobre el A C, fórmula que podemos escribir así,

$$(3) \qquad c^2 = b^2 + a^2 - 2b \times DC$$

Observación.—En el caso 2.° en que D C = A C = b, la fórmula (3), dá

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2b^2 = a^2 - b^2,$$

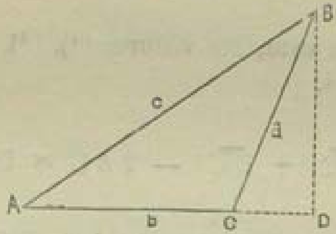
como debía ser, pués en este caso, el triángulo A B C es rectángulo en A y c es uno de sus catetos.

Teorema 93.

186) *En todo triángulo, el cuadrado de un lado opuesto á un ángulo obtuso, es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, aumentada del doble producto de uno de estos, por la proyección que sobre él forma el otro.*

Sea A B C el triángulo dado en el cual $AB = c$, es el lado opuesto al ángulo obtuso C. Proyectando

(Figura 170.)



el lado A B sobre el A C, tendremos el triángulo rectángulo A B D y

$$(^1) \ldots\ldots \overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2;$$

pero

$$AD = AC + CD,$$

luego

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 + 2AC \times CD.$$

Además, en el triángulo rectángulo C B D, se tiene

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2,$$

$\therefore$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 + 2AC \times CD$$

ó también

$$c^2 = b^2 + a^2 + 2b \times CD$$

siendo CD la proyección del lado a sobre el b.

Corolario. — *De los teoremas precedentes* se deduce: *que si un ángulo de un triángulo es agudo, recto ú obtuso, el cuadrado del lado opuesto, es menor, igual* *ó mayor, que la suma de los cuadrados de los otros dos lados.*

Observación.— Cuando se dán las medidas de los tres lados de un triángulo, los teoremas precedentes permiten calcular la proyección de uno de los lados sobre uno de los otros dos, y luego, la longitud de la perpendicular trazada del vértice sobre el lado opuesto.

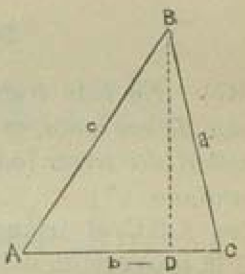
Por ejemplo: calcular la altura B D de un triángulo A B C, cuyos lados son:

$$a = 6^{m},$$

$$b = 5^{m},$$

$$c = 7^{m}.$$

(Figura 171.)



Desde luego se observará que el angulo C, opuesto al lado c es agudo, pués

$$c^2 = 49 < a^2 + b^2 = 61.$$

La fórmula

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2b \times DC,$$

se convierte en

$$49 = 25 + 36 - 2 \times 5 \times DC$$

de donde

$$DC = \frac{61 - 49}{10} = \frac{12}{10} = 1^{m}.20.$$

Por otra parte, el triángulo B D C, dá

$$\overline{BD}^2 = a^2 - \overline{DC}^2 = 36 - 1.44 = 34.56$$

$\therefore$

$$BD = \sqrt{34.56} = 5^{m}.879$$

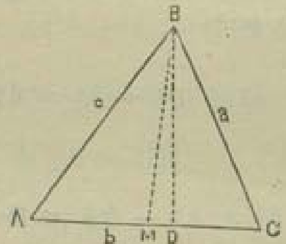
con un error menor que un medio milímetro.

Teorema 94.

187) *En todo triángulo, la suma de los cuadrados de dos de sus lados, es igual al duplo del cuadrado de la mitad del tercer lado, más el duplo del cuadrado de la mediana.* (*)

Sea A B C el triángulo dado; B M la mediana y D C la proyección del lado a sobre el b.

(Figura 172.)



Siendo obtuso el ángulo A M B del triángulo ABM, tendremos

$$(1) \quad \overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + 2\,AM \times MD$$

(*) Se llama *mediana*, la recta que une un vértice de un triángulo al punto medio de lado opuesto.

El lado B C es opuesto al ángulo agudo B M C, por tanto

$$(^2) \quad \overline{BC}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{BM}^2 - 2\,MC \times MD,$$

y sumando, miembro á miembro, las (¹) y (²)

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MC}^2 + 2\,\overline{BM}^2 + 2\,MD\,(AM - MC)$$

y como A M = M C.

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\,\overline{AM}^2 + 2\,\overline{BM}^2,$$

ó también

$$a^2 + c^2 = 2\,\overline{AM}^2 + 2\,\overline{BM}^2,$$

lo que demuestra el teorema.

Observación I.—El teorema precedente, permite calcular la longitud de las medianas de un triángulo cuando se dán las longitudes de sus lados.

En efecto, sean

$$a = 6^m,$$

$$b = 5^m,$$

$$c = 7^m.$$

Teniendo presente que $AM = \frac{b}{2}$, la fórmula

$$a^2 + c^2 = 2\,\overline{AM}^2 + 2\,\overline{BM}^2.$$

nos dá

$$36 + 49 = 2 \times 6.25 + 2\,\overline{BM}^2$$

de donde

$$\overline{BM}^2 = \frac{85 - 12.50}{2} = 36^m.25,$$

$\therefore$

$$BM = \sqrt{36.25} = 6^m.021,$$

con un error menor que un medio milímetro.

Observación II. — Si restamos la relación (²) de la (¹), del teorema precedente, tendremos

$$\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 = 4AM \times MD = 2AC \times MD.$$

ó bién

$$c^2 - a^2 = 2b \times MD.$$

Luego: *la diferencia de los cuadrados de dos lados de un triángulo, es igual al duplo del tercer lado, por la proyección de la mediana sobre este lado.*

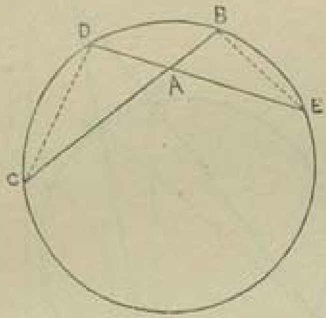
Teorema 95.

188) *Si de un punto del plano de un círculo, se trazan secantes, el producto de sus distancias á los dos de intersección de cada secante con la circunferencia, es una cantidad constante.*

Dos casos pueden presentarse, que el punto sea interior ó exterior.

1.° — Supongamos que A sea un punto situado en el interior del círculo; tracemos por él las dos secantes CB y DE, y las cuerdas BE y DC. Los triángulos ABE, ADC, son semejantes, pués tienen los ángulos en A iguales, por opuestos por el vértice, y los B y D iguales, por inscritos en el mismo

(Figura 173.)



segmento CDBE. La comparación de los lados homólogos de estos triángulos nos dá,

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC},$$

$\therefore$

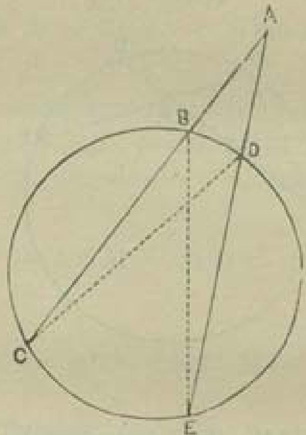
$$AB \times AC = AE \times AD,$$

producto que es constante para toda secante que pase por el punto A.

2.º — Supongamos que A sea un punto situado exteriormente al círculo; tracemos las secantes ABC, ADE, y las cuerdas BE y DC, formando así los dos triángulos ACD y ABE, que son semejantes por tener el ángulo A común y los ángulos en

C y E iguales por inscritos en el mismo arco B C E D. Estos triángulos nos dán

(Figura 174.)



$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC},$$

$$AB \times AC = AE \times AD.$$

que demuestra el teorema enunciado.

Observación I.—Los segmentos A B, A C, de la secante A C, son inversamente proporcionales á los segmentos A D, A E, de la secante A E.

Observación II.—En el caso que el punto esté situado en el interior del círculo, si consideramos el diámetro que pasa por el punto A, llamando r al radio del círculo y d la distancia del punto A al centro, tendremos

$$AB \times AC = AE \times AD = \text{const.}$$

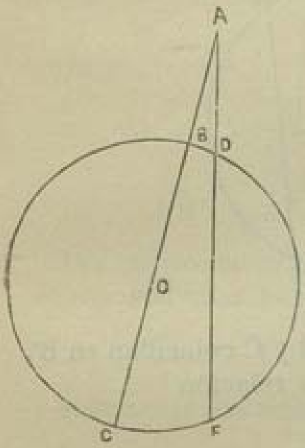
pero

$$AB = r - d, \quad AC = r + d,$$

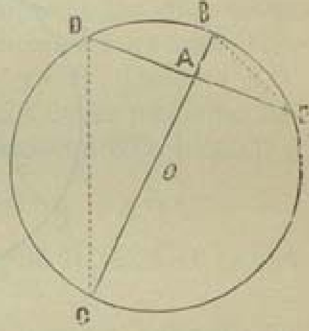
$$\therefore$$

$$AE \times AD = (r - d)(r + d) = r^2 - d^2.$$

(Figura 175.)



(Figura 176.)



Si el punto A es exterior, se tiene

$$AB \times AC = AD \times AE = \text{cte.}$$

y como

$$AB = d - r, \quad AC = d + r,$$

$$\therefore$$

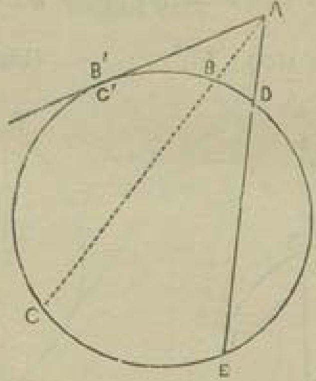
$$AD \times AE = (d - r)(d + r) = d^2 - r^2.$$

Teorema 96.

189) *Si de un punto exterior á un círculo, se tiran una tangente y una secante cualquiera á la circunferencia, la tangente es media proporcional entre la secante y su segmento externo.*

Si hacemos girar alrededor del punto A, á la secan-

(Figura 177.)



te A B C, hasta que los puntos B y C coincidan en B', la secante se hace tangente y la relación

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AE},$$

puesto que A B = A C, tomará la forma

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AE} \text{ ó bién; } \overline{AB}^2 = AD \times AE.$$

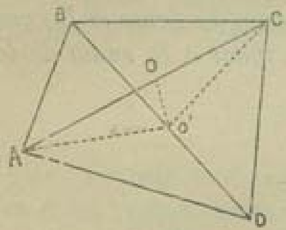
es decir, que la tangente A B, es media proporcional entre la secante A E y su segmento externo A D.

Teorema 97.

190) *En un cuadrilátero convexo, la suma de los cuadrados de sus lados, es igual á la suma de los cua-*

drados de sus dos diagonales, aumentada del cuádruplo del cuadrado de la recta que une los puntos medios de las diagonales.

(Figura 178.)



Sea $ABCD$ el cuadrilátero; O, O', los puntos medios de las diagonales y tracemos las rectas OO', AO' y CO'. La recta AO' es una de las medianas del triángulo ABD, luego (94)

$$\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = 2\overline{DO'}^2 + 2\overline{AO'}^2.$$

Del mismo modo, en el triángulo BCD, CO' es una de sus medianas, luego

$$\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = 2\overline{DO'}^2 + 2\overline{CO'}^2,$$

y sumando estas relaciones, miembro á miembro,

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = 2\overline{AO'}^2 + 2\overline{CO'}^2 + 4\overline{DO'}^2$$

Pero en el triángulo $AO'C$, OO' es una mediana luego

$$\overline{AO'}^2 + \overline{CO'}^2 = 2\overline{OO'}^2 + 2\overline{CO}^2,$$

$\therefore$

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = 4\overline{OO'}^2 + 4\overline{CO}^2 + 4\overline{DO'}^2$$

ó bién, puesto que

$$2CO = AC, \quad 2DO' = BD,$$

resulta

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4\overline{OO'}^2$$

Corolario.—Si el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo, será $OO' =$ cero, y la fórmula anterior se cambia en

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2,$$

que dice: *que en un paralelogramo, la suma de los cuadrados de sus cuatro lados, es igual á la suma de los cuadrados de sus diagonales.*

La recíproca es evidente.

Problemas del libro III.

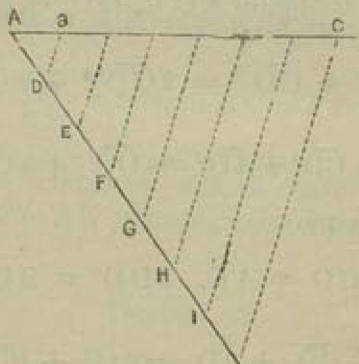
Problemas gráficos.

PROBLEMA I.

191) *Dividir una recta en un cierto número de partes iguales.*

Sea AB la recta que se propone dividir en siete

(Figura 179.)

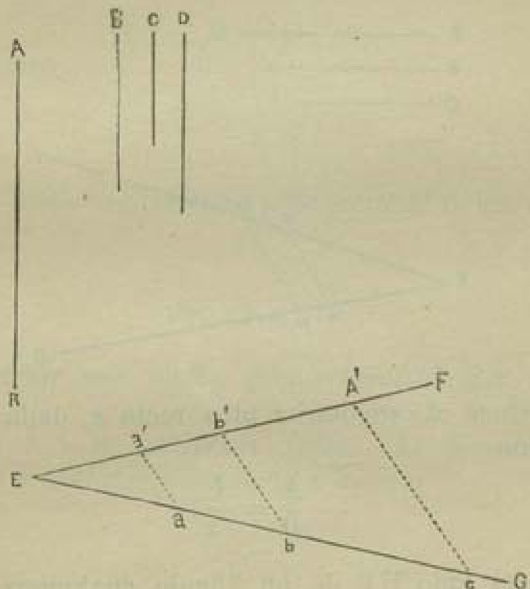


partes iguales. Por el punto A, trazo una recta cualquiera A C, sobre la cual llevo á partir de A, siete veces una longitud arbitraria A a; uno el punto C con el B extremo de la recta, y por los puntos de división trazo paralelas á la C B que interceptan porciones A D = D E = E F,.......

PROBLEMA II.

192) *Dividir una recta* A R, *en partes proporcionales á las rectas dadas* B, C, D.

(Figura 180.)



Sobre el lado E F de un ángulo cualquiera, tomo E A' = A R, y sobre el otro lado, las longitudes

$$Ea = B,\ ab = C,\ bc = D.$$

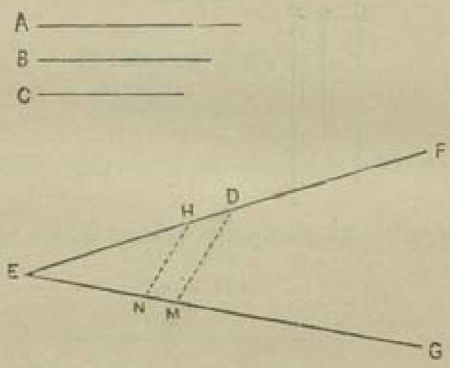
Enseguida, trazo la recta A′c, á la cual se llevan paralelas por los puntos *a*, *b*, y estas paralelas divirán á A′E = AR, en partes proporcionales á las rectas dadas.

PROBLEMA III.

193) *Construir la cuarta proporcional á las tres rectas dadas* A, B, C.

Siendo A, B, C, las tres rectas dadas, la cuestión

(Figura 181).



se reduce á encontrar otra recta x, dada por la relación

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{x}.$$

Sobre el lado EF de un ángulo cualquiera FEG tomo

$$ED = A, \text{ y } EH = B;$$

sobre el otro lado EG, tomo EM = C, y uno el punto

D al M, y trazando por H una paralela á DM, obtengo EN que es la cuarta proporcional buscada. En efecto:

$$\frac{ED}{EH} = \frac{EM}{EN},$$

ó bién

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{EN},$$

$$\therefore \quad EN = x.$$

Observación.—Si se tuviera

$$B = C$$

tendríamos

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{EN},$$

y EN, sería una tercera proporcional á las rectas A y B.

PROBLEMA IV.

Construir una media proporcional á dos rectas dadas.

Sean A y B, las rectas dadas. La cuestión se reduce, á encontrar una recta x tal que

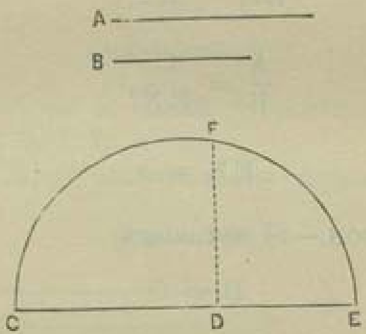
$$\frac{A}{x} = \frac{x}{B}.$$

Para resolver el problema, tomemos sobre una recta indefinida,

$$CD = A, \; DE = B,$$

y con diámetro C E, tracemos una semi-circunferencia; la recta D F perpendicular al diámetro es la

(Figura 182.)

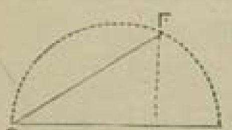


media proporcional buscada, pués sabemos, que la perpendicular bajada de un punto de una circunferencia á uno de sus diámetros, es media proporcional á los segmentos del diámetro; segmentos que en este caso, son las rectas dadas.

Se puede resolver también este problema como sigue:

Con la magnitud dada A = C D como diámetro, se describe una semi-circunferencia; se lleva sobre C D, la longitud B = C E; se levanta en E, la perpendicular E F y uniendo los puntos C y F, la recta C F es la media proporcional buscada, pués es media proporcional entre el diámetro y su segmento adyacente, que son las magnitudes dadas.

(Figura 183.)

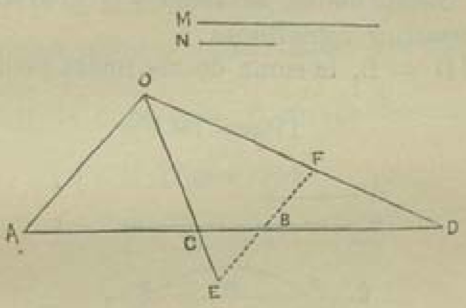


PROBLEMA V.

194) *Siendo dados, sobre una recta indefinida, dos puntos* A y B, *encontrar los puntos de esta recta cuyas distancias á los* A, B, *sean proporcionales á dos longitudes dadas* M N.

Por un punto A de una recta indefinida, se lleva

(Figura 184.)



una recta cualquiera A O = M y por B una paralela á A O; se toma sobre esta paralela

$$BF = BE = N,$$

y se trazan las rectas O E, O F las cuales dan, sobre A B, los puntos C y D que satisfacen á la cuestión. En efecto, los triángulos semejantes O D A y D F B, dán

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AO}{BF} = \frac{M}{N};$$

los triángulos semejantes A O C y C B E, dán

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AO}{BE},$$

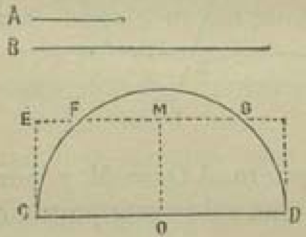
$$\therefore \quad \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{CB} = \frac{M}{N}.$$

PROBLEMA VI.

195) *Siendo dadas, la suma y el producto de dos líneas, construir estas líneas.*

Sea C D = B, la suma de las líneas pedidas cuyo

(Figura 186.)



producto es igual al cuadrado de la línea dada A. Sobre C D como diámetro, describo una semi-circunferencia, levanto en C, la perpendicular C E á C D y tomo sobre ella C E = A; por E trazo la E F G paralela á C D y en la secante E G y su segmento externo E F tendré las líneas pedidas. En efecto,

$$\overline{EC}^2 = EG \times EF = A^2,$$

y para demostrar que su suma es igual á C D, no habrá más que observar, que la perpendicular tirada del centro O sobre la secante, divide la cuerda F G en dos partes iguales, pues la suma $EF + EG$ es igual al doble de M E ó del radio O C, es decir, igual al diámetro C D.

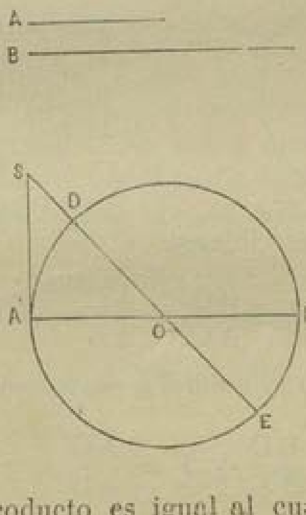
OBSERVACIÓN.—Para que el poblema sea posible es necesario que $A < \frac{B}{2}$ es decir, que la recta A sea menor que la semi-suma de las líneas ó cuando más igual á ella.

PROBLEMA VII.

196) *Construir dos rectas, dándose su diferencia y su producto.*

Sea A' B' la diferencia B, de las dos rectas bus-

(Figura 186.)



cadas, cuyo producto es igual al cuadrado de la línea dada A. Con A' B' como diámetro, describo una circunferencia de círculo; levanto en A', la perpendicular, sobre el diámetro, sobre la cual tomo A'S = A; y trazando la secante S D E tendré en esta y su segmento externo, las dos líneas buscadas, pués

$$SE - SD = DE = A'B' = B$$

y

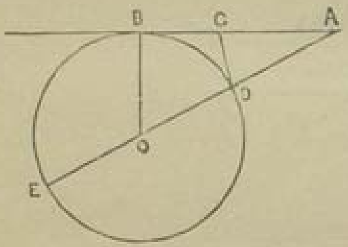
$$\overline{SA'}^2 = SE \times SD.$$

PROBLEMA VIII.

197) *Dividir una recta en media y extrema razón.*

Para dividir una recta en media y extrema razón, se divide la recta en dos segmentos tales, que el mayor sea medio proporcional entre el segmento menor y el total.

(Figura 187.)



Sea A B la recta dada y supongamos resuelto el problema, siendo C un punto tal que se tenga

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC}$$

que podemos escribir así:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{AB}.$$

Aumentando la unidad á ambos miembros y reduciendo

$$\frac{BC}{AC} + 1 = \frac{AC}{AB} + 1$$

$$\frac{BC + AC}{AC} = \frac{AC + AB}{AB}$$

ó bien

$$(BC + AC) \times AB = (AC + AB) \times AB,$$

pero en la figura tenemos

$$BC + AC = AB,$$

$$\therefore \quad \overline{AB}^2 = (AC + AB) \times AB.$$

Esta última relación nos muestra, que para encontrar el punto C, es necesario construir dos rectas,

$$AC + AB \text{ y } AB,$$

cuya diferencia sea igual á AB y cuyo producto sea $\overline{AB}^2$, y tomar á partir del punto A, sobre AB, una longitud igual á la menor. De aquí la construcción:

Por el punto B, se traza una perpendicular $OB = \frac{AB}{2}$; del punto O, como centro, se describe una circunferencia tangente á AB, y por A, la secante ADOE, y esta secante y su segmento externo AD resuelven la cuestión. No habrá más que llevar la longitud AD sobre AB, á partir de A, para obtener el punto C que divide á la recta AB en medio y extrema razón.

Corolario.—Si se designa con a la longitud AB, en el triángulo rectángulo ABO, tendremos

$$\overline{AO}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{OB}^2$$

pero, en el supuesto

$$AB = a, \quad OB = \frac{a}{2}$$

$$\therefore \quad \overline{AO}^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5}{4}a^2,$$

pero

$$AC = AD = AO - OD = AO - OB$$

$\therefore$

$$AC = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

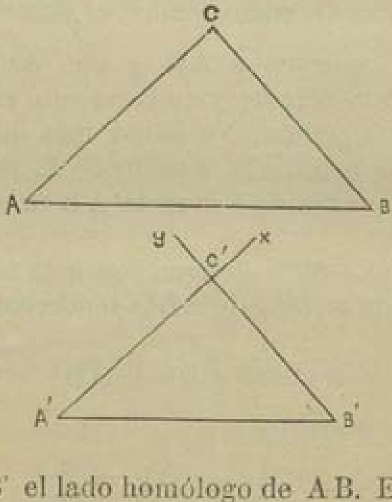
y luego

$$BC = AB - AC = a - \frac{a}{2}\sqrt{5} + \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5})$$

PROBLEMA IX.

198) *Sobre una recta dada* A'B', *construir un triángulo semejante á un triángulo dado* ABC.

(Figura 183)



Sea A' B' el lado homólogo de AB. En los puntos A' y B' formo los ángulos

$$B'A'x = BAC \text{ y } A'B'y = ABC;$$

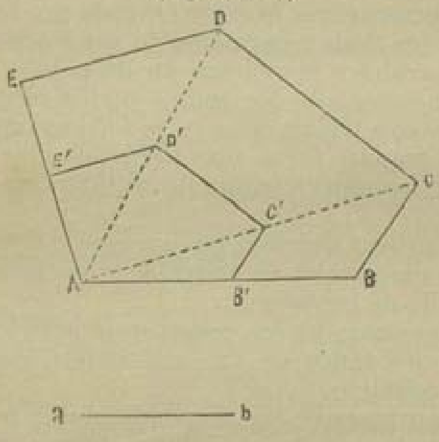
los lados A' x y B' y se cortarán en un punto C' y el triángulo A' B' C', así formado, será semejante al propuesto por tener dos ángulos respectivamente iguales.

PROBLEMA X.

199) *Dándose el lado de un polígono, construirlo de manera que sea semejante á un polígono dado.*

Sea ab, el lado homólogo del lado AB. Tirando

(Figura 189.)



las diagonales AC, AD, del polígono dado, tomo sobre AB

$$AB' = ab,$$

y por B', trazo una paralela al lado BC formando el triángulo AB' C' que es semejante al ABC; por C', trazo la C' D' paralela á CD formando el triángulo AC' D' semejante al ACD; en fin, por D' trazo D' E' paralela á ED, formando así el triángulo

A D' E' semejante con el A D E. Tendremos así, el polígono A B' C' D' E' que está formado del mismo número de triángulos semejantes y semejantemente dispuestos á los que forman el polígono dado A B C D E, y por tanto, serán semejantes.

Ejercicios.

1.º—Demostrar que la recta trazada por los puntos medios de los lados paralelos de un trapecio y los lados no paralelos concurren en un punto.

2.º—Demostrar que los radios de los círculos inscritos en los tres triángulos que se forman bajando del vértice del ángulo recto una perpendicular sobre la hipotenusa, forman un triángulo rectángulo semejante á los otros.

3.º—Demostrar que la recta que une los puntos medios de las diagonales de un trapecio, es igual á la semi-diferencia de las bases.

4.º—Demostrar que las rectas que ligan los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera, forman su paralelogramo.

6.º—Demostrar que las perpendiculares bajadas de un punto cualquiera de la diagonal de un paralelogramo, sobre los lados adyacentes, son inversamente proporcionales á estos lados.

7.º—Demostrar que la suma de los cuadrados de los cuatro segmentos formados por dos cuerdas cualesquiera de un círculo, perpendiculares entre sí, es una cantidad constante.

8.º—Demostrar que la cuerda que une, uno de los puntos comunes á dos círculos secantes iguales, al punto en que la línea de los centros encuentra á una cualquiera de las dos circunferencias, es media proporcional, entre el radio y la porción de la línea de los centros comprendida en la parte común á las dos circunferencias.

9.º—Demostrar que la suma de los cuadrados de los lados no paralelos de un trapecio, es igual á la suma de los cuadrados de las diagonales, menos el duplo del rectángulo de las bases.

10.—Demostrar que si una recta trazada del vértice de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto, en media y extrema razón, dividirá, de la misma manera, á toda recta trazada en el triángulo paralelamente á este lado.

11.—Demostrar que si se une el vértice A de un triángulo isósceles, á un punto M cualquiera de la base BC, se tiene la relación

$$\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + BM \times MC.$$

12.—Demostrar que siendo dadas dos líneas de longitud diferente, su media aritmética es mayor que su media geométrica.

13.—Demostrar que en todo triángulo, el producto de dos lados es igual al producto de la altura correspondiente al tercer lado por el diámetro de la circunferencia circunscrita.

14.—Demostrar que en todo cuadrilátero inscriptible, el producto de las diagonales es igual á la suma de los productos de los lados opuestos.

15.—Demostrar que en un cuadrilátero inscriptible, las diagonales son entre sí como las sumas de los productos de los lados que concurren á sus extremidades.

16.—Siendo dado un círculo y un punto exterior, tirar por este punto una secante tal que la porción comprendida en el círculo sea media proporcional entre la secante y su segmento externo.

17.—Encontrar el lugar geométrico de los puntos de un plano, cuya suma de los cuadrados de sus distancias á dos puntos dados, sea igual á una cantidad dada.

18.—Encontrar el lugar geométrico de los puntos de un plano cuya diferencia de los cuadrados de sus distancias á dos puntos dados es igual á una cantidad dada.

19.—Encontrar el lugar geométrico de los puntos medios de las secantes y de sus segmentos externos, trazadas desde un punto exterior á un círculo dado.

20.—Encontrar el lugar geométrico de los puntos de un plano cuyas distancias á un punto A, sean el doble de sus distancias á un punto B.

Problemas numéricos.

21.—Dos personas colocadas sobre dos navíos de manera á encontrarse cada uno á tres metros sobre el nivel del mar, dejan de verse á una distancia de 12.600 metros. ¿cuál será la longitud aproximada del radio terrestre?

22.—¿A qué distancia, en plena mar, se extenderá la vista de un hombre, suponiendo que se encuentra á 60 metros sobre el nivel del mar? (Radio de la superficie del mar 6.366,198 metros).

23.—Siendo dados dos círculos de radios 58 metros y 13 metros, y siendo la distancia de sus centros de 126 metros calcular la longitud de una tangente común, con un error menor que $0^{m}.001$

24.—Se tienen dos círculos de radios 62^{m} y 48^{m}; la distancia de sus centros es de 166^{m}: calcular con un error menor que $0^{m}.001$, la porción comprendida entre los dos círculos de una paralela á la línea de los centros trazada á una distancia de 30 metros de ella.

25.—Calcular con una aproximación de $0^{m}.01$ el radio del círculo inscrito en un triángulo rectángulo cuyos catetos son 1^{m}. y 2^{m}.

26.—Calcular con una aproximación de $0^{m}.01$ el cateto de un triángulo rectángulo, valiendo un ángulo agudo 66° y 1^{m} el cateto opuesto.

27.—Siendo las bases de un trapecio de 738^{m}. y 548^{m}, y valiendo cada uno de los lados no paralelos

203 ^{m}; calcular, con un error menor que 0 ^{m}.001, la longitud de las diagonales del trapecio.

28.—Del vértice del ángulo recto de un triángulo, se baja la perpendicular sobre la hipotenusa y se propone, encontrar la longitud de esta perpendicular y la de cada uno de los segmentos de la hipotenusa, sabiendo que la longitud de los catetos es respectivamente de 5 ^{m}.5 y de 8 ^{m}.2.

29.—Trazando un diámetro y una cuerda perpendiculares entre sí, en un círculo de radio igual á 26^m, y siendo 24^m la longitud de la cuerda ¿cuál será la longitud de los segmentos así determinados sobre el diámetro?

30.—Prolongando 2 ^{m}.4 el radio de un círculo que supongo valga 5 ^{m}.7; trazando, por el punto así obtenido, dos tangentes al círculo y uniendo por una cuerda los puntos de contacto, se pregunta ¿cuál es la longitud de esta cuerda, y cuál su distancia al centro del círculo?

31.—Si por el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo, cuyos catetos son 3 ^{m}.128 y 4 ^{m}.275, se traza la bisectriz del ángulo recto, esta determinará dos segmentos sobre la hipotenusa ¿cuál será la longitud de estos segmentos, con un error menor que 0 ^{m}.001?

32.—Siendo la hipotenusa de un triángulo rectángulo de 3^{m}24 y la longitud de la perpendicular llevada del vértice del ángulo recto sobre la hipotenusa de 1 ^{m}.15 ¿cuál será la longitud de cada uno de los catetos del triángulo, con un error menor que 0 ^{m}.01?

33.—En los puntos A y B de una recta A B = 0 ^{m}.25 se levantan dos perpendiculares, A C = 0 ^{m}.13 y B D = 0^m .07 se toma sobre A B, un punto O tal que los ángulos C O A y D O B sean iguales y se pide: calcular las longitudes O A y O B.

(Figura 190.)

34.—En un círculo se cortan dos de sus cuerdas de tal manera que los dos segmentos de la una, valen respectivamente $1^{m}.2$ y $2^{m}.1$; y la diferencia entre los dos segmentos de la otra, vale $1^{m}.84$ ¿cuál será la longitud de la última cuerda?

35.—Dándose una circunferencia de 1^{m} de radio y un punto de su plano, que diste 8^{m} de su centro; trazar, por este punto, una secante tal que la cuerda interceptada sea de 1^{m}; y calcular con un error menor que $0^{m}.01$ la longitud de la parte exterior de la secante.

36.—Determinar sobre una tangente á un círculo de 3 5 de radio, un punto tal que la secante trazada de este punto y que pasa por el centro, resulte dividida en partes iguales en el punto en que encuentra al círculo.

37.—Tomando sobre dos rectas paralelas, dos sistemas de tres puntos A, B, C; A' B' C', tales que

$$AB = 2^{m},\ BC = 5^{m};\ A'B' = 1^{m}24,\ B'C' = 3^{m}\ 15,$$

decir, si las rectas que resultan de unir entre sí los puntos A y A', B y B', C y C', concurrirán á un mismo punto.

LIBRO CUARTO.

Polígonos regulares.

200) Definiciones.—Se llama polígono *regular*, á todo polígono, cóncavo ó convexo, que tiene sus lados y ángulos iguales. El triángulo equilátero, el cuadrado, etc., son polígonos regulares.

201) Se dice que un polígono está *inscrito* en una circunferencia de círculo, cuando todos sus vértices están en la circunferencia. Recíprocamente, se dice que el círculo está *circunscrito* á la circunferencia.

Un polígono está *circunscrito* á una circunferencia de círculo, cuando sus lados son tangentes á esta.

202) Se llama *límite* de una cantidad variable, á una cantidad fija á la cual la cantidad variable puede aproximarse indefinidamente, de tal manera, que la diferencia entre estas dos magnitudes pueda ser menor que toda cantidad dada.

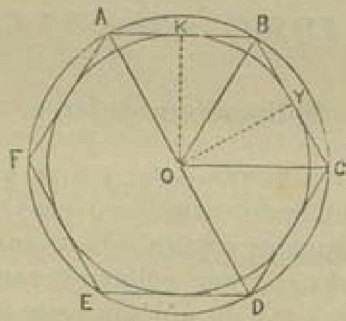
Teorema 98.

203) *Todo polígono regular puede inscribirse ó circunscribirse en una circunferencia de círculo.*

1.º—Por tres vértices del polígono A B C D E F, trazo una circunferencia de círculo, y sea O su centro, digo que esta circunferencia debe pasar por los otros vértices del polígono.

En efecto, tracemos O Y perpendicular á C B y unamos los puntos A, B, D, al centro O. Los dos cuadriláteros O Y B A y O Y C D se pueden superponer,

(Figura 191.)



pués tienen iguales los ángulos en Y por rectos; Y B = Y C; áng. B = áng. C, y el lado C D = A B puesto que el polígono es regular, Luego O D = O A y la circunferencia que tiene por centro al punto O pasará por D. Del mismo modo probaríamos que la circunferencia pasa por los otros vértices del polígono.

2.º—Los lados A B, B C, C D, etc., del polígono A B C D ... son cuerdas iguales del círculo circunscrito; entonces, las perpendiculares O K, O Y,.... tiradas del centro O, sobre estas cuerdas, serán iguales entre sí; y la circunferencia descrita con centro O y radio O K, pasará por los puntos medios de los lados A B, B C, C D,.... y será tangente á estos lados y por consecuencia el polígono regular A B C D .... puede circunscribirse á una circunferencia de círculo,

Observación.—El punto O, que es á la vez el centro de los círculos inscrito y circunscrito, se llama *centro* del polígono regular.

Se designan con los nombres de *radio* y *apotema* del polígono regular, á los radios de los círculos circunscrito é inscrito.

Se llama *ángulo al centro* del polígono regular, al ángulo de dos radios consecutivos O A O B.

Todos los ángulos al centro son iguales entre sí y su suma es igual á 4 ángulos rectos. Como el número de los ángulos al centro es el mismo que el de los lados del polígono regular, se obtendrá el valor de uno de ellos dividiendo 4 rectos por el número de lados del polígono. Así, el ángulo del polígono de la figura será

$$\frac{4 \text{ rts.}}{6} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ.$$

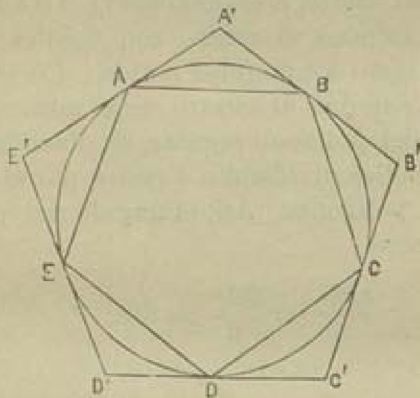
Teorema 99.

204) *Si se divide una circunferencia de círculo dada, en un número cualquiera de arcos iguales: 1.º Las cuerdas de estos arcos formarán un polígono regular convexo, inscrito en su circunferencia. 2.º Las tangentes trazadas por los puntos de división, forman un polígono regular convexo, circunscrito á la circunferencia.*

1.º—Como los arcos A B, B C,.... son iguales, lo serán sus cuerdas, y el polígono inscrito tiene sus lados iguales, En cuanto á sus ángulos tenemos que cada uno, tiene por medida la mitad de la suma de tres arcos iguales, ó en general, de un número igual de arcos iguales, luego serán iguales entre sí y el polígono es regular.

2.º—El polígono A' B' C' .... formado por sus tangentes trazadas por los puntos A, B, C, ... es también regular. En efecto, observaremos que cada uno de los triángulos, tales como A' A B es isósceles,

(Figura 192.)



puesto que las tangentes llevadas á un círculo de un punto exterior son iguales; y todos estos triángulos son iguales entre sí, pues tienen respectivamente iguales la base y los ángulos adyacentes, Por ejemplo, tomemos dos de estos triángulos, el A' A B y el C' C D en los cuales se tiene: A B = C D por hipótesis; el ángulo en A, tiene por medida la mitad del arco A B; el ángulo C, tiene por medida la mitad del arco C D, y como arc. A B = arc. C D, estos ángulos son iguales; por consiguiente, siendo isósceles los dos triángulos, serán iguales entre sí.

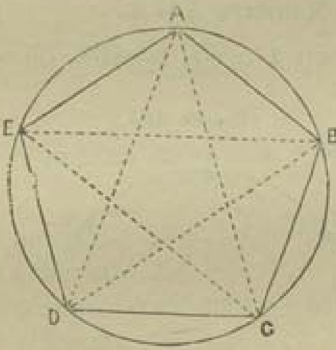
205) Corolario I.—Cuando se divide una circunferencia de círculo en un número N de partes iguales, y á partir de uno de los puntos de división se trazan las cuerdas que ligan sucesivamente de

1 en 1, de 2 en 2, de 3 en 3, etc., de x en x, hasta llegar al punto de partida, se obtiene una série de polígonos regulares inscritos; convexos, aquellos para los cuales N es divisible por x y cuyo cociente entero dá el número de lados del polígono; y cóncavos, que también se llaman *polígonos estrellados*, aquellos para los cuales N no es divisible por x. Cuando $\frac{N}{x} = 2$ se vuelve al punto de partida por un diámetro.

Veamos algunos ejemplos.

La división en 3 y en 4 arcos iguales, dan orígen solo al triángulo equilátero y al cuadrado.

(Figura 193.)



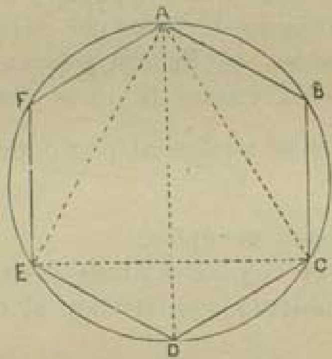
La división en 5 arcos iguales dá solo dos polígonos que son:

$\frac{5}{1} = 5$, el pentágono convexo A B C D E A;

$\frac{5}{2}$, el pentágono estrellado A C E B D A.

La división en 6 arcos iguales dá solo dos polígoaos convexos que son:

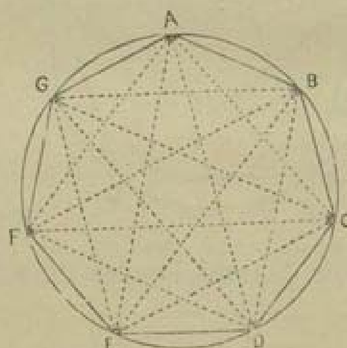
(Figura 194.)



$\frac{6}{1} = 6$, el exágono convexo A B C D E F A;
$\frac{6}{2} = 3$, el triángulo equilátero A C E A,
$\frac{6}{3} = 2$, el diámetro A D A.

La división en 7 arcos iguales dá orígen á tres

(Figura 195.)

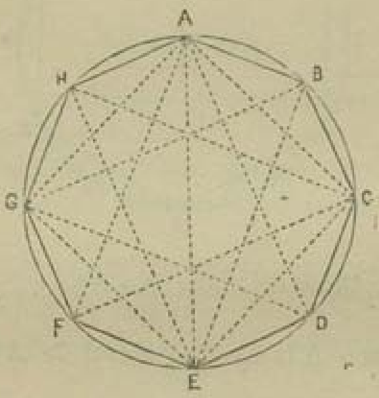


polígonos regulares, uno convexo y los otros dos estrellados, que son:

$\frac{7}{1} = 7$, el polígono convexo A B C D E F G A;
$\frac{7}{2}$, el polígono estrellado de siete lados A C E G B D F A;
$\frac{7}{3}$, el polígono estrellado de siete lados A D G C F B E A.

La división en 8 arcos iguales dá origen á tres po-

(Figura 106.)



lígonos regulares, dos convexos y uno estrellado, que son:

$\frac{8}{1} = 8$, el octógono convexo A B C D E F G H A;
$\frac{8}{2} = 4$, el cuadrado A C E G A;
$\frac{8}{3}$, el octógono estrellado A D G B E H C F A;
$\frac{8}{4} = 2$, el diámetro A E A;

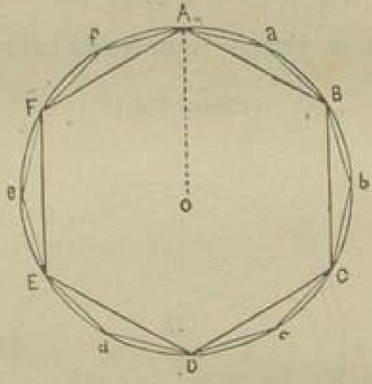
y así siguiendo.

Teorema 100.

206) *Cuando el número de lados de un polígono regular inscrito, crece indefinidamente, su perímetro tiene por límite la circunferencia circunscrita.*

Sea ABC.... un exágono regular inscrito en la circunferencia OA. Inscribamos el polígono regular

(Figura 197.)



de doble número de lados $AaBb$ ... y tendremos

$$\text{arco } AB > Aa + aB > AB,$$

$$\therefore \qquad \text{circunf. } OA > P_{12} > P_6 \qquad (^1)$$

siendo P_{12} y P_6 los perímetros del dodecágono y del exágono inscritos.

Inscribiendo en la misma circunferencia el polígono regular de 24 lados, luego el de 48 lados, después el de 96 lados, y así siguiendo, la relación (¹) subsiste siempre entre la longitud de la circunferencia y los perímetros de los dos últimos polígonos considerados, y donde observaremos que el perímetro del último polígono se acerca más á la circunferencia que el del anterior. Entonces, si el número de lados del polígono inscrito aumenta al infinito, su perímetro tiende á confundirse con la circunferencia, y podemos decir:

Que la circunferencia de círculo es el límite al cual tienden los perímetros de los polígonos inscritos cuyo número de lados crece al infinito.

207) COROLARIO. — *El área de un polígono inscrito en una circunferencia de círculo, cuyo número de lados crece al infinito, tiene por límite el área del círculo.*

Teorema 101.

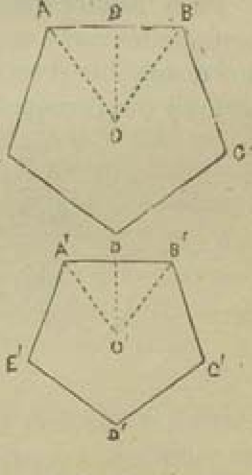
208) *En dos polígonos regulares del mismo número de lados, se verifica:*

1.° *Los polígonos son semejantes.*

2.° *Los perímetros están entre sí, como sus radios ó como sus apotemas.*

1.° — Sean A B C D E, A' B' C' D' E', dos polígonos regulares del mismo número de lados, por ejemplo, dos pentágonos.

(Figura 198.)



Sabemos, que la suma S de los ángulos de un polígono, es igual á tantas veces dos rectos como lados tiene menos dos, por consiguiente, para el pentágono será

$$S = (5 - 2) \times 2 \text{ rts.} = 6 \text{ rts.}$$

y el ángulo será

$$\frac{S}{5} = \frac{6}{5} \text{ rts.}$$

valor que será el mismo en los dos pentágonos regulares. Además, como por hipótesis se tiene

$$AB = BC = CD = DE = EA,$$

$$A'C' = B'C' = C'D' = D'E' = E'A',$$

se tendrá que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \ldots\ldots$$

y los dos polígonos serán semejantes.

2.º—Sean $O O'$, los centros de los dos polígonos $O A$, $O A'$, sus radios y $O a$, $O a'$, sus apotemas. Siendo semejantes los polígonos y llamando P, P', sus perímetros, tendremos

$$\frac{P}{P'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Pero los triángulos isósceles AOB, $A'O'B'$, son semejantes pués tienen los ángulos $O = O' = \frac{4}{n}$ rts; los triángulos rectángulos $A O a$, $A'O'a'$ son equiángulos y por consiguiente semejantes luego

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AO}{A'O'} = \frac{Oa}{O'a'},$$

$$\therefore \quad \frac{P}{P'} = \frac{AO}{A'O'} = \frac{Oa}{O'a'}.$$

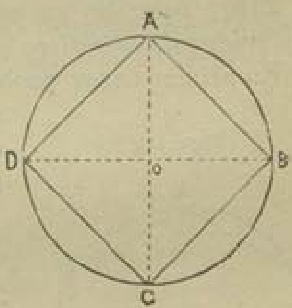
Problemas.

PROBLEMA I.

209) *Inscribir un cuadrado en una circunferencia de circulo.*

Sea O el centro de una circunferencia dada. Por el punto O trazo dos diámetros perpendiculares entre sí y los extremos de estos diámetros serán los cuatro vértices del cuadrado pedido, pués la circunferencia resulta dividida en cuatro arcos iguales en dichos puntos y las cuerdas de estos arcos son los lados del cuadrilátero.

(Figura 199.)



Para calcular la razón del lado L del cuadro al radio R de la circunferencia circunscrita, bastará observar que el triángulo rectángulo A O B dá

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2,$$

ó bién

$$L^2 = R^2 + R^2 = 2R^2,$$

$$\therefore \quad L = R\sqrt{2}.$$

Corolario.—Si dividimos en dos partes iguales cada uno de los arcos subtendido por los lados del cuadrado inscrito y ligamos por rectas, estos puntos de división á los vértices del cuadrado, obtendremos el octógono regular convexo.

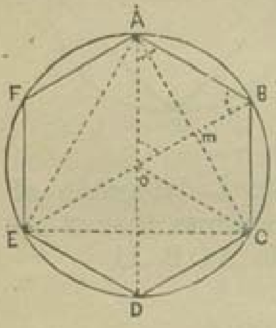
Para inscribir el polígono regular convexo de 16 lados, dividiremos en dos partes iguales los arcos subtendidos por los lados del octógono, trazando las cuerdas de estos arcos. Continuando de este modo, la bisección, obtendríamos los polígonos regulares convexos de 32, 64, 128, ... lados

PROBLEMA II.

210) *Inscribir en un círculo dado, un exágono y un triángulo equilátero.*

En primer lugar, probemos que el lado del exágono regular inscrito en una circunferencia de círculo, es igual al radio.

(Figura 200.)



1.º — Sea A B el lado del exágono regular inscrito en el círculo de radio O A = R.

El triángulo A O B es isósceles pués dos de sus lados son radios de la misma circunferencia, tiene el ángulo al vértice O, que vale

$$\text{áng. } O = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ;$$

la suma de los ángulos A y B será

$$A + B = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$$

pero como el triángulo es isósceles será A = B

$$\therefore\ A = B = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

y el triángulo es equilátero. Resulta pués,

$$AB = R$$

Luego, para construir el exágono regular bastará, llevar sucesivamente el radio seis veces sobre la circunferencia.

2.º—Trazado el exágono regular, bastará para obtener el triángulo equilátero, trazar sucesivamente las rectas que ligan dos vértices no consecutivos, obteniendo la figura A C E que es el triángulo equilátero.

Si trazamos el diámetro AD, formaremos el triángulo ACD rectángulo en C, luego

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{DC}^2,$$

pero

$$AD = 2R, \quad DC = R,$$

$$\overline{AC}^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2,$$

$\therefore$

$$AC = R\sqrt{3}.$$

teniendo así, el lado del triángulo equilátero.

211) Corolario I.—Para inscribir en el círculo de radio O A = R, los polígonos regulares convexos de 12, 24, 48, 96, etc., lados, bastaría dividir en 2, 4, 8, 16, etc., arcos iguales á los arcos subtendidos por los lados del exágono regular inscrito y trazar las cuerdas de los nuevos arcos.

212) Corolario II.—Si en la figura trazamos el radio O C, formaremos un rombo A O C B, cuyos diagonales son AC y OB,

$$Om = mB = \frac{R}{2}$$

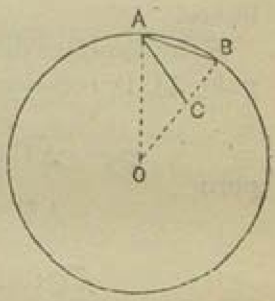
y la apotema del triángulo equilátero es igual á la mitad del radio del círculo circunscrito.

PROBLEMA III.

213) *Inscribir en una circunferencia de círculo dada, un decágono regular.*

Sea A B el lado del decágono regular convexo inscrito en la circunferencia de radio O A, y demostremos que este es igual al mayor segmento del radio dividido en media y extrema razón.

(Figura 201).



En efecto: tirando los radios O A y O B formaremos un triángulo A O B isósceles cuyo ángulo al vértice vale $\frac{360^\circ}{10} = 36$, y cuyo ángulo en la base, vale

$$\frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = \frac{144^\circ}{2} = 72^\circ = 2 \times 36^\circ,$$

es decir, el doble del valor del ángulo en O. Sentado esto, tracemos la bisectriz A C del ángulo A, la cual dividirá al lado O B del triángulo O A B en dos segmentos O C y C B proporcionales á los lados adyacentes, es decir, tales que

$$(1) \qquad \frac{AO}{AB} = \frac{OC}{CB}.$$

Pero el triángulo A C O es isósceles, por tener el ángulo en A igual al ángulo en O, luego A C = O C, además, el triángulo A C B es también isósceles pués tiene

$$\text{áng. } A\,C\,B = \text{áng. } O + \text{áng. } C\,A\,O = 72^{\circ},$$

por ser externo en el triángulo A C O, valor que es el del ángulo B, luego

$$A\,B = A\,C = O\,C,$$

y con A O = O B, por radios de la misma circunferencia, la relación (¹) podrá escribirse

$$(^2) \qquad \frac{O\,B}{O\,C} = \frac{O\,C}{C\,B'}$$

la cual dice, que el punto C divide al radio O B en media y extrema razón y como O C = A B, el lado del decágono es igual al mayor segmento.

Observación I.—En la figura, se tiene

$$C\,B = O\,B - O\,C;$$

por otra parte, la relación (²), dá

$$\overline{O\,C}^2 = O\,B \times C\,B,$$

luego

$$\overline{O\,C} = O\,B\,(O\,B - O\,C) = \overline{O\,B}^2 - O\,B \times O\,C,$$

y si representamos por x al lado del decágono regular A B = O C; y por R al radio O B el círculo circunscrito, tendremos

$$x^2 + x\,.\,R - R^2 = o,$$

de donde

$$x = -\frac{R}{2} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4} \quad R^2}\; x = -\frac{R}{2} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4} + R^2}$$

y considerando solo la raíz positiva que responde á la cuestión, resulta

$$x = AB = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

para valor del lado del decágono regular inscrito en una circunferencia de radio R.

OBSERVACIÓN II.—Teniendo inscrito el decágono regular, podemos inscribir enseguida, los polígonos regulares de 20, 40, etc... lados, dividiendo sucesivamente cada arco en dos partes iguales y ligando por cuerdas los puntos de división á los vértices del polígono.

PROBLEMA IV.

214) *Inscribir, en una circunferencia de círculo, un pentágono regular.*

Teniendo determinados los vértices del decágono r gular inscrito, no habrá más que trazar las rectas que unen estos vértices de dos en dos y se tendrá el pentágono regular convexo inscrito en el círculo.

OBSERVACIÓN I.—Para calcular el radio del pentágono regular convexo, demostraremos primero:

Que el lado del pentágono regular convexo, es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son, el radio del círculo circunscrito y el lado del exágono regular convexo inscrito en el mismo círculo.

En efecto, sea AB el lado del decágono regular convexo; prolongándolo hasta el punto C, tal que

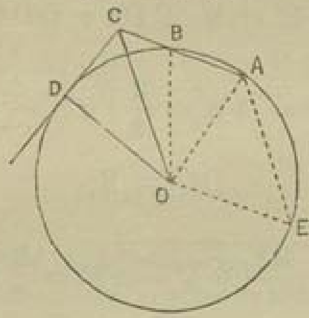
$$AC = OA,$$

tracemos del punto C la tangente CD, cuyo cuadrado será

$$\overline{CD}^2 = CA \times CB$$

y puesto que B A es igual al mayor segmento del

(Figura 202).



radio dividido en media y extrema razón, es decir

$$\frac{CA}{AB} = \frac{AB}{CB},$$

que dá

$$\overline{AB}^2 = CA \times CB,$$

resultará

$$CD = AB.$$

Trazando las rectas O D y O C, tendremos un triángulo rectángulo cuyos catetos son iguales al radio y al lado del decágono regular inscrito y solo nos resta probar, que el lado del pentágono convexo, es igual á la longitud O C.

Para esto, tracemos la recta A E paralela á CO y uniendo O con E, tendremos el rombo C A E O, teniendo en A E = O C, el lado del pentágono regular inscrito, pués el ángulo E O A es igual al ángulo O A C, por alternos-internos y el último igual á 72°, como antes hemos visto, teniendo así resuelta la cuestión.

Sentado esto, el triángulo COD dá,

$$OC = \sqrt{\overline{CD}^2 + \overline{DO}^2},$$

pero

$$CD = AB = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

$$DO = R,$$

$\therefore$

$$OC = \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4}(\sqrt{5} - 1)^2} = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

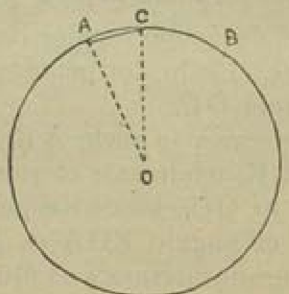
que es el valor del lado del pentágono regular convexo, inscrito en una circunferencia de radio R.

PROBLEMA V.

215) *Inscribir en una circunferencia de círculo, un pentadecágono regular convexo.*

Tomemos, á partir de un punto A de la circunfe-

(Figura 203.)



rencia O A un arco AB igual á $\frac{1}{6}$, y á partir de B un arco B C igual á $\frac{1}{10}$ y trazando la cuerda A C, tendremos el lado del pentadecágono regular convexo, inscrito en la circunferencia, pués

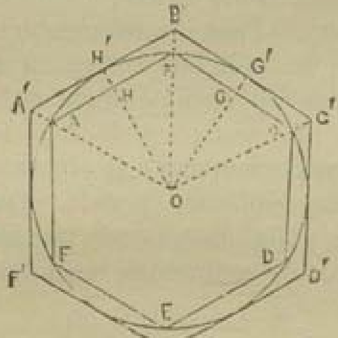
$$\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{10}{60}-\frac{6}{60}=\frac{4}{60}=\frac{1}{15}.$$

PROBLEMA VI.

216) *Dándose un polígono regular inscrito en una circunferencia de circulo, circunscribir á esta un polígono semejante.*

Sea A B C D E F el polígono dado; tracemos los radios O H' y O G' perpendiculares á los lados A B,

(Figura 204.)



B C, y por los puntos H', G', tracemos las paralelas A' B', B' C', á los lados A B, B C. Estas paralelas son tangentes á la circunferencia y el polígono que forman es semejante al lado.

En efecto, los ángulos de estos dos polígonos son iguales por estar formados por rectas paralelas y dirigidas en el mismo sentido; además sus lados son proporcionales, pués en los triángulos O A B y O A' B' que son semejantes, se tiene

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'O}{BO},$$

y en los O B' C' y O B C

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{B'O}{BO},$$

$$\therefore \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC},$$

y del mismo modo estableceríamos la proporcionalidad de los demás lados de los polígonos.

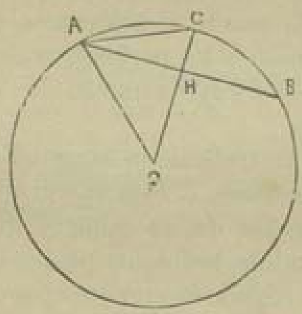
Observación.—Para inscribir en una circunferencia de círculo, un polígono semejante á un polígono regular circunscrito, bastará trazar del centro rectas á las vértices del polígono dado y los puntos en que estas rectas encuentran á la circunferencia serán los vértices del polígono pedido. También puede obtenerse este polígono uniendo por rectas, los puntos consecutivos de contacto de los lados del polígono circunscrito.

PROBLEMA VII.

21̣) *Dados os valores numéricos, del lado de un polígono regular inscrito, y del radio del círculo, calcular el valor del lado del polígono regular inscrito de doble número de lados.*

Sea $AB = m$ el valor del lado del polígono

(Figura 205.)



regular inscrito dado; tracemos OC perpendicular á AB, y luego la recta AC.

Designemos con $x = AC$, el valor buscado y con R al radio de la circunferencia.

El triángulo OAC dá

$$\overline{AC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 - 2OC \times AH,$$

es decir,

$$x^2 = 2R^2 - 2R \times OH,$$

pero en el triángulo rectángulo OHA, se tiene

$$OH = \sqrt{R^2 - \frac{m^2}{4}}$$

$\therefore$

$$x = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{m^2}{4}}}$$

Relación de la circunferencia al diámetro.

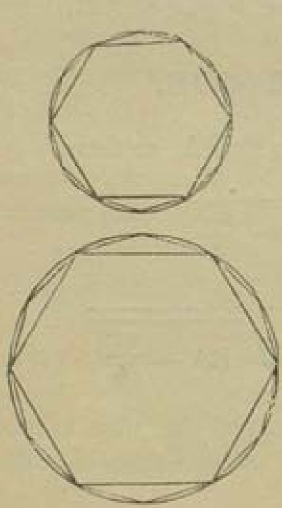
218) Hemos visto (Teor. 99) que una circunferencia de círculo puede considerarse como el límite hácia el cual tienden los perímetros de los polígonos regulares inscritos cuyo número de lados aumenta indefinidamente.

Así, cuando se trata de la longitud de una circunferencia, se considera á esta como el perímetro de un polígono regular de un número muy grande de lados, atribuyéndole todas las propiedades relativas á los polígonos regulares con independencia del número de sus lados.

Teorema 102.

219) *Dos circunferencias de círculo, son proporcionales á sus radios.*

(Figura 206.)



Sean R y r los radios de las circunferencias circunscritas á dos polígonos regulares del mismo numero de lados, por ejemplo, dos exágonos; la razón de sus perímetros P, p, es la misma que la de los radios, es decir

$$\frac{P}{p}=\frac{R}{r}$$

Si en seguida inscribimos los polígonos de doble número de lados, es decir, los polígonos de 12 lados, cuyos perímetros llamaremos P', p', tendremos también,

$$\frac{P'}{p'} = \frac{R}{r};$$

y como esta relación permanece constante cualquiera que sea el número de lados de los polígonos regulares inscritos en las dos circunferencias, valdrá también cuando los perímetros se confundan en el límite con las circunferencias,

$$\therefore \qquad \frac{C}{c} = \frac{R}{r} = \frac{2R}{2r}, \qquad (^1)$$

designando con C y c, las longitudes de las dos circunferencias.

220) COROLARIO.—*La razón de una circunferencia á su diámetro, es una cantidad constante.*

La relación (^{1}), se puede escribir así

$$\frac{C}{2R} = \frac{c}{2r},$$

y luego, la razón de una circunferencia á su diámetro es una cantidad constante.

Esta razón constante, se designa ordinariamente con la letra griega π, que el geómetra *Lambert* probó en 1761 que es un número irracional.

El valor de π, en decimales es

$$\pi = 3.14159265358979 3 \ldots\ldots$$

Arquímedes, 250 años antes de nuestra era, calculó por primera vez el valor de π encontrando que estaba comprendido entre los numeros $\frac{220}{70}$, y $\frac{223}{71}$ pero generalmente se toma al primero $\frac{22}{7} = 3.1428$, con un error menor que una media milésima.

Métius, geómetra del siglo XV, dió para valor aproximado de la razón π, el número $\frac{355}{113} = 3.1415920$, fracción fácil de recordar, pues basta para formarla, escribir los tres primeros números impares repetidos, y dividir el número formado por los tres últimos, por el formado por los tres primeros.

De que la razón de una circunferencia á su diámetro es una cantidad constante, resulta:

Que para calcular la longitud de una circunferencia, dado su diámetro, basta multiplicar este diámetro por el número π; y recíprocamente. Estas reglas están contenidas en la fórmula siguiente:

$$\text{circ. R} = 2\,\text{R} \times \pi,$$

es decir

$$\text{circ. R} = 2\,\pi\,\text{R}.$$

Corolario II.—Siendo dado el radio R de un arco de círculo de n grados calcular la longitud l de este arco.

Teniendo la circunferencia de círculo 360°, escribiremos

$$360^\circ : 2\,\pi\,\text{R} : : n^\circ : l$$

$$\therefore$$

$$l = \frac{2\,\pi\,\text{R} \times n^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi\,\text{R}\,n}{180},$$

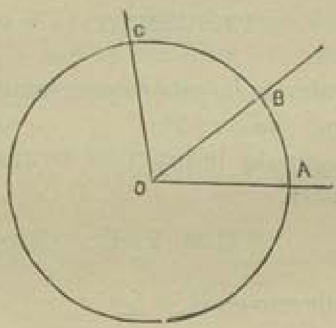
fórmula que nos dará una cualquiera de las cantidades l, R, n, cuando se dén las otras dos.

Teorema 103.

221) *Si haciendo centro en el vértice de un ángulo, se describe una circunferencia de círculo, de radio arbitrario, y se toma como unidad, al ángulo al centro que intercepta un arco de longitud igual al radio, el arco interceptado por los lados del ángulo dado, tiene por valor, el producto del radio por el ángulo.*

En efecto, sea A O B el ángulo dado; con centro

(Figura 207.)



en O y radio O A, se describe una circunferencia y tomando á partir de B, un arco B C igual al radio se tendrá:

$$\frac{\text{áng. } AOB}{\text{áng. } BOC} = \frac{\text{arc. } AB}{\text{arc. } BC},$$

pero el arco *B C* es por hipótesis igual al radio R y el ángulo B O C se toma por unidad, luego

$$\frac{\text{áng. } AOB}{1} = \frac{\text{arc. } AB}{R},$$

$\therefore$

$$\text{arc. } AB = R \times \text{áng. } AOB.$$

OBSERVACION.—Para calcular el número de grados contenidos en la unidad de ángulo B O C, bastará poner $R = l$, en la fórmula

$$l = \frac{\pi R m}{180}$$

y despejar á n, así

$$n = \frac{180}{\pi} = 57^{\circ}\ 17'\ 44''$$

PROBLEMA I.

222) *Calcular la longitud aproximada de una circunferencia cuyo radio es* 5^{m}.

La fórmula que dá la longitud de una circunferencia es (Teor. 101)

$$C = 2\pi R;$$

en el caso propuesto es $R = 5^{m}$

$$\therefore \quad C = 2 \times 3.141592 \times 5^{m} = 31^{m}.41592$$

con un error menor que una cien milésima.

PROBLEMA II.

223) Hallar la longitud de un arco de $19.^{\circ}\ 27'\ 43''$ que pertenece á una circunferencia de radio $2.^{m}74$

La fórmula que dá la longitud pedida (Teor. 101) es

$$l = \frac{\pi R n}{180},$$

reduciendo á segundos, tendremos

$$n = 19^{\circ}\ 27'\ 43'' = 70.063'',$$

$$180^{\circ} = 648.000'',$$

y la fórmula dará

$$l = \frac{70.063 \times 2.74 \times 3.141592}{648000.}$$

PROBLEMA III.

224) *Siendo la longitud del meridiano terrestre de 40.000.000 de metros, calcular el valor del radio de la tierra, con un error menor que un kilómetro.*

La fórmula

$$2\pi R = 40000000^{m} = 40000\ k^{m},$$

dá

$$R = \frac{20000\ k^{m}.}{\pi} = \frac{20.000}{3.14159} = 6.366\ k^{m}.$$

PROBLEMA IV.

225) *Calcular la razón de la circunferencia al diámetro.*

1.º — MÉTODO DE LOS POLÍGONOS REGULARES INSCRITOS.

Consideremos un círculo que tenga por radio á la unidad de longitud é inscribamos en este círculo al cuadrado cuyo lado vale $\sqrt{2}$; y haciendo en la fórmula

$$x = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{m^2}{4}}},$$

$R = 1$ y $m = \sqrt{2}$, se tendrá

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

que dá el valor del lado del octógono regular inscrito.

Si conservando el valor $R = 1$, hacemos en la misma fórmula $a = \sqrt{2 - \sqrt{2}},$ obtendremos

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \; ;$$

que dá el valor del lado del polígono regular inscrito de 16 lados, y así siguiendo. Llamando, l_4, l_8, l_{16}, l_{32}, ... á los lados de los polígonos regulares inscritos de 4, 8, 16, 32, ... lados, y P_4, P_8, P_{16}, P_{32}, ... sus respectivos perímetros, se encontrará

$$l_4 = \sqrt{2} \, ,$$

$$l_8 = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \, ,$$

$$l_{16} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \, ,$$

$$l_{32} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \, ,$$

....

$$P_4 = 4\sqrt{2},$$

$$P_8 = 8\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

$$P_{16} = 16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$

$$P_{32} = 32\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},$$

....

Pero los valores de los perímetros se aproximan cada vez más á la longitud de la circunferencia, y considerando á uno de ellos como que representa aproximadamente á la circunferencia, bastará dividir este valor por el del diámetro 2, para tener el valor aproximado del número π; siendo evidente que esta aproximación será tanto mayor cuanto mayor sea el número de lados del polígono considerado.

Área de las figuras planas.

225) DEFINICIONES.—Se llama ÁREA á la extensión superficial de una figura cualquiera.

Cuando dos figuras tienen áreas iguales, sin tener la misma forma, se dice que son EQUIVALENTES.

226) Se llama ALTURA de un paralelogramo á la perpendicular que mide la distancia de dos lados opuestos de la figura; los lados entre los cuales se traza la altura se llaman BASES del paralelogramo.

227) Se llama ALTURA de un trapecio, á la perpendicular que mide la distancia entre los lados paralelos, y estos dos son las BASES del trapecio.

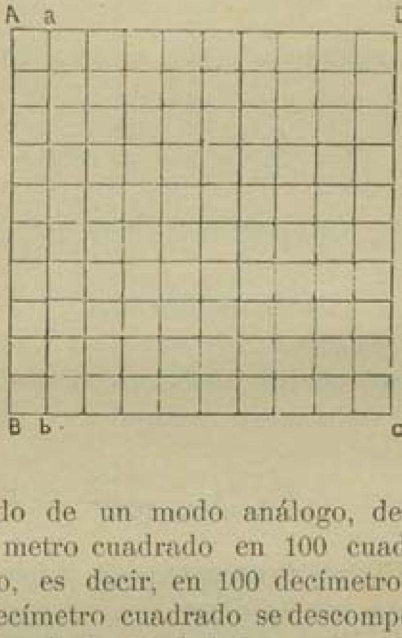
228) Se llama ALTURA de un triángulo, á la perpendicular bajada al vértice sobre el lado opuesto tomado como BASE.

229) Así como se toma al *metro* por unidad de longitud ó unidad lineal, se toma por unidad de superficie al *metro cuadrado*, que es un cuadrado de un metro de lado. Pero los múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado corresponden á otras tantas unidades de superficie, á veces empleadas, y así, se dice: 5 kilómetros cuadrados, 7 centímetros cuadrados, tomando por unidad al kilómetro cuadrado ó al centímetro cuadrado.

Cada unidad superficial vale 100 unidades del órden inmediato inferior ó $\frac{1}{100}$ del orden inmediato superior. Por ejemplo, el decímetro cuadrado vale 100 centímetros cuadrados ó $\frac{1}{100}$ de metro cuadrado.

Supongamos que el cuadrado $ABCD$, tiene 100 metros de lado, el cual representará la hectárea. Dividamos cada uno de los lados AB, BC, en diez partes iguales, y llevando por los puntos de división rectas paralelas á los otros dos lados, tendremos la hectárea descompuesta en 10 columnas, como la $ABba$, que contienen cada una 10 cuadrados, ó bien $10 \times 10 = 100$ cuadrados que tienen 10 metros de lado, es decir, 100 áreas. Tomando una de estas áreas y haciendo una construcción análoga, la tendríamos descompuesta en 100 cuadrados de un metro de lado, y como la hectárea contiene 100 áreas, se podrá descomponer en $100 \times 100 = 10{,}000$ metros cuadrados.

(Figura 208.)



Procediendo de un modo análogo, descompondríamos un metro cuadrado en 100 cuadrados de $0^m.1$ de lado, es decir, en 100 decímetros cuadrados; cada decímetro cuadrado se descompondría en 100 cuadrados de $0^m.01$ de lado, y el metro podría descomponerse en $100 \times 100 = 10{,}000$ cuadrados de un centímetro de lado, es decir, en 10,000 centímetros cuadrados, y así, siguiendo.

Observación.—Observaremos en la figura, que un décimo de una unidad superficial cualquiera, representa 10 unidades del orden inmediato inferior; un centésimo, 100 unidades del orden inmediato inferior, etc., etc. Así un décimo de metro cuadrado contiene 10 decímetros cuadrados; un centésimo de metro cuadrado contiene 100 centímetros cuadrados, etc....

Para encontrar el área ó extensión superficial de un cuadrado, bastará, pués, formar el cuadrado de su lado expresado en unidades lineales; así, si se tiene un cuadrado que tiene por lado $a = 25^{m}$, tendremos

$$\text{área del cuadrado} = a \times a = 25 \times 25 \text{ mts. cuad.}$$

es decir,

$$a^2 = 25^{m} \times 25^{m} = 625^{m.c.}$$

Si el lado del cuadrado fuera $a = 10^{m}.25$, tendríamos,

$$a^2 = 105^{m.c.}\,06,\,25,$$

es decir, 105 metros cuadrados, 6 decímetros cuadrados, 25 centímetros cuadrados.

Teorema 104.

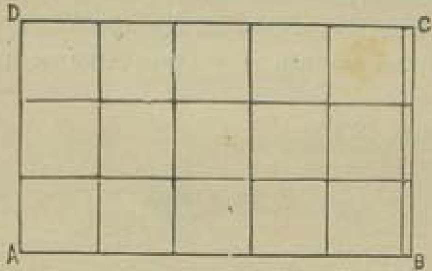
230) *El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura.*

Sea ABCD un rectángulo que tenga por base $b = AB = 5^{m}.1$, y por altura $a = AD = 3^{m}$.

A partir de A, llevemos la unidad lineal sobre las dos dimensiones del rectángulo, y por los puntos de división tracemos paralelas á estas dimensiones. Tendremos así, la figura ABCD formada por 15 cuadrados de un metro de lado, y tres rectángulos que representan tres décimos de metro cuadrado.

Si tomáramos como unidad al decímetro, dividiríamos los lados del rectángulo: A D en 30 partes

(Figura 209.)



iguales y A B en 51, y llevando paralelas á los lados por los puntos de división, tendríamos formado el rectángulo A B C D, por 1530 cuadrados de un decímetro de lado, ó sean 1530 decímetros cuadrados; pero el metro cuadrado tiene 100 decímetros cuadrados, luego,

$$S = \frac{1530}{100} = 15^{m.c.} 30,$$

llamando S al área del rectángulo.

Pero representando con b la base A B del rectángulo y con a su altura A D, tendremos

$$15^{m.c.} 30 = 5^{m}.10 \times 3^{m} = AB \times AD$$

$$\therefore$$

$$S = b \times a$$

y la superficie ó área del rectángulo es igual al producto de su base por su altura.

Teorema 105.

231) *Dos rectángulos que tienen la misma altura, son proporcionales á sus bases.*

Sean S y S' los arcos de dos rectángulos que tienen por altura común a y respectivamente por bases á b y b'.

Tendremos, (230).

$$S = a \times b,$$

$$S' = a \times b',$$

y dividiendo miembro á miembro, resulta,

$$\frac{S}{S'} = \frac{a \times b}{a \times b'} = \frac{b}{b'}$$

que dice: que las áreas de los rectángulos de misma altura, son proporcionales á sus bases.

Si los rectángulos tuvieran alturas desiguales a, a', y la misma base b, sería

$$S = a \times b,$$

$$S' = a' \times b',$$

$$\therefore \quad \frac{S}{S'} = \frac{a}{a'};$$

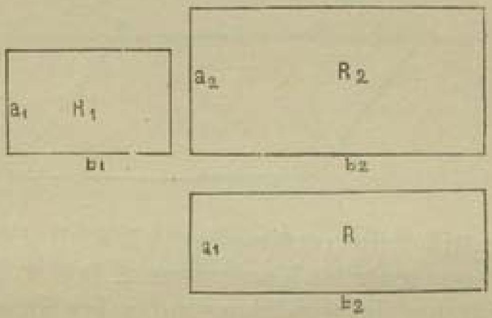
y las áreas de los rectángulos de base igual, son proporcionales á sus alturas.

Teorema 106.

232) *Dos rectángulos cualesquiera, son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas.*

Sean R_1 y R_2 dos rectángulos que tienen a_1, a_2, por

(Figura 210.)



alturas y b_1, b_2, por bases; construyamos un rectángulo R que tenga, a_1 por altura y b_2 por base.

Comparando los rectángulos R_1 y R, tendremos

$$\frac{R_1}{R} = \frac{b_1}{b_2};$$

comparando los R y R_2,

$$\frac{R}{R_2} = \frac{a_1}{a_2},$$

y multiplicando miembro á miembro, estas igualdades, resulta

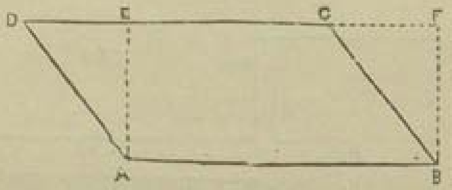
$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{a_1 \times b_1}{a_2 \times b_2},$$

Teorema 107.

233) *El área de un paralelogramo es igual al producto de su base por su altura.*

Siendo A B C D el paralelogramo dado, levantemos en A y B perpendiculares á A B formando así,

(Figura 211.)



los dos triángulos rectángulos A D E, B C F, que son iguales por tener las hipotenusas $AD = CB$, por lados opuestos del paralelogramo, y los ángulos en A y B iguales, por tener sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido.

Considerando la figura A E C B, se puede establecer

$$AECB + ADE \equiv AECB + BCF, \quad (*)$$

pero

$$AECB + ADE = \text{paralelog. } ABCD$$

$$AECB + BCF = \text{rectáng. } ABFE$$

$\therefore$

$$\text{paralelog. } ABCD = \text{rectáng. } ABFE.$$

(*) Usaremos el signo $\equiv$ para indicar equivalencia de dos figuras.

Pero

$$\text{área } A\,B\,F\,E = A\,B \times A\,E,$$

luego

$$\text{área } A\,B\,C\,D = A\,B \times A\,E,$$

quedando demostrado el teorema.

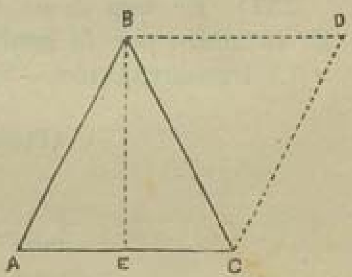
234) Corolario. — Si dos paralelogramos tienen bases iguales, sus áreas son proporcionales á sus alturas. Si dos paralelogramos tienen alturas iguales, sus áreas son proporcionales á sus bases.

Teorema 108.

235) *El área de un triángulo es igual á la mitad del producto de su base por su altura.*

Sea A B C un triángulo; por B y C, trecemos las rectas B D, C D, paralelas respectivamente á los lados A C y A B, formando así, el paralelogramo A B C D que es el doble del triángulo A B C, pués B C viene á ser una diagonal que lo divide en dos triángulos iguales.

(Figura 212)



Sentado esto, como el área del paralelogramo es A C × B E, tendremos

$$\text{área } A\,B\,C = \tfrac{1}{2} A\,C \times B\,E.$$

L. Q. D. D.

Corolario I. — Dos triángulos de áreas T, T', que tienen la misma base b son proporcionales á sus alturas a, a', pues

$$T = \frac{1}{2} a \times b,$$

$$T' = \frac{1}{2} a' \times b.$$

$$\frac{T}{T'} = \frac{a}{a'}$$

Si tienen la misma altura, serán proporcionales á sus bases.

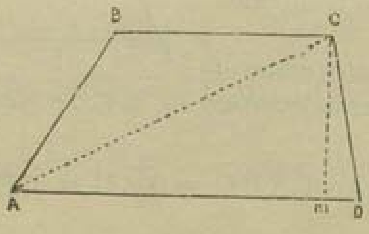
236) Corolario. — Dos triángulos que tienen sus bases y alturas respectivamente iguales, son equivalentes.

Teorema 109.

237) *El área de un trapecio es igual al producto de su altura por la semi-suma de sus bases.*

1.ª Demostración.—Sea ABCD, el trapecio dado.

(Figura 213.)



y suponiendo que A D, B C, sean los lados paralelos, tracemos la diagonal A C y la perpendicular Cm á la base A D, la cual lo será también á la B C. De este modo, hemos descompuesto al trapecio en dos triángulos A C D, A B C, que tienen la misma altura Cm, y designando por S_1, S_2, sus áreas y por S la del trapecio, tendremos

$$S_1 = Cm \times \frac{AD}{2},$$

$$S_2 = Cm \times \frac{BC}{2},$$

y sumando

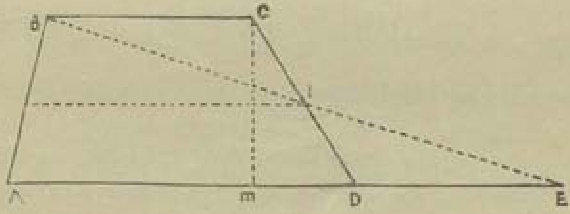
$$S_1 + S_2 = S = Cm \times \frac{AD + BC}{2}.$$

2.ª Demostración.—Prolongando la base A D y tomando en su prolongación

$$DE = BC,$$

y uniendo B con E, formaremos dos triángulos

(Figura 214.)



B C I, D I E, que son iguales por tener un lado igual por construcción, y los ángulos adyacentes á este lado respectivamente iguales por alternos-internos. Entonces, si á la figura A B I D, le agregamos el triángulo B C I, tendremos el trapecio A B C D; pero si en vez de este, le agregamos el triángulo D I E, tendremos el triángulo A B E. Por consiguiente, el trapecio A B C D es equivalente al triángulo A B E y como este último tiene por área $\mathrm{C}m \times \frac{\mathrm{AE}}{2}$, tendremos que el área S del trapecio será

$$\mathrm{S} = \mathrm{C}m \times \frac{\mathrm{AE}}{2} = \mathrm{C}m \times \frac{\mathrm{AD} + \mathrm{BC}}{2}$$

pués

$$\mathrm{AE} = \mathrm{AD} + \mathrm{BC}, \text{ por construcción.}$$

238) Corolario.—El área del trapecio A B C D puede expresarse también, por el producto de la longitud de la recta I O, que une los puntos medios de los lados no paralelos, por la distancia C m entre las bases.

En efecto, trazando por I, la paralela I O á las bases y la recta B I, prolongada, tendremos los triángulos semejantes B O I, B A E que dán

$$\frac{\mathrm{BI}}{\mathrm{BE}} = \frac{\mathrm{IO}}{\mathrm{AE}} = \frac{1}{2},$$

por ser B I = I E, luego

$$\mathrm{IO} = \frac{\mathrm{AE}}{2} = \frac{\mathrm{AD} + \mathrm{BC}}{2};$$

y la superficie S del trapecio,

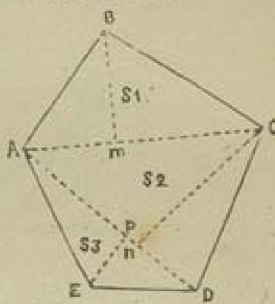
$$\mathrm{S} = \frac{\mathrm{AD} + \mathrm{BC}}{2} \times \mathrm{C}m = \mathrm{IO} \times \mathrm{C}m.$$

PROBLEMA I.

239) *Hallar el área de un polígono cualquiera.*

1.º — Para valuar el área de un polígono cualquiera A B C D E, se trazan sus diagonales A C, A D, con lo que el polígono queda descompuesto en triángulos A B C, A C D, A D E, se calculan las áreas S_1, S_2, S_3, de estos triángulos, y su suma S será el área del polígono, así

(Figura 215.)



$$S_1 = Bm \times \frac{AC}{2},$$

$$S_2 = Cn \times \frac{AD}{2},$$

$$S_3 = Ep \times \frac{AD}{2}$$

y sumando

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \tfrac{1}{2}\left[Bm \times AC + (Cn + Ep)\, AD\right]$$

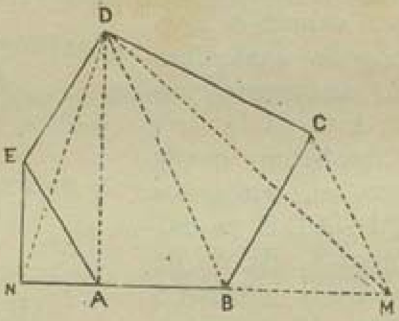
2.º — Cuando el polígono se tiene trazado sobre el papel se podrá transformar en un triángulo equivalente al polígono, midiendo luego su superficie.

Así, sea A B C D E un pentágono irregular. Tracemos la diagonal DB; por C, una paralela á DB prolongada hasta encontrar en M á la prolongación del lado A B y uniendo D con M tendremos,

triáng. D B C $=$ triáng D B M

por tener la base D B común é igual altura, y luego

(Figura 216.)



pentág. A B C D E $\equiv$ cuadril. A M D E.

Trazando la diagonal A D y haciendo una construcción análoga á la anterior, tendremos

triáng. A D E $\equiv$ triáng. A D N,

por tener común la base A D y la misma altura, y luego

cuadril. A M D E $\equiv$ triáng. N M D

y también

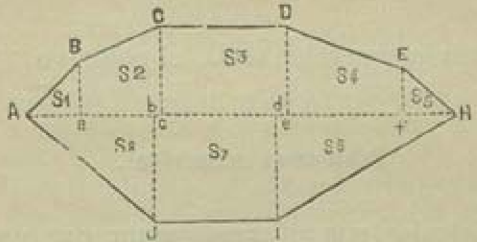
pentág. A B C D E $\equiv$ triáng. N M D.

Por consiguiente, calculando la superficie del triángulo N M D, tendríamos la superficie del pentágono dado.

3.º — Cuando el polígono está sobre el terreno se emplea de preferencia el método siguiente:

Sea á valuar la superficie del polígono ABCDEHIJ; tracemos la diagonal A H y por los vértices que están fuera de esta recta, las perpendiculares á su dirección las cuales descompondrán á la figura en un cierto

(Figura 217.)



número de trapecios y triángulos, cuyas áreas sumadas, nos darán el área buscada.

Así, llamando S á la superficie del polígono propuesto, y s_1, s_2, s_3,...... las superficies de las figuras en que resulta dividido, tendremos

$$s_1 = \tfrac{1}{2}\, Aa \times Ba,$$
$$s_2 = \tfrac{1}{2}\,(Ba + Cc) \times ac,$$
$$s_3 = \tfrac{1}{2}\,(Cc + De) \times ce,$$
$$s_4 = \tfrac{1}{2}\,(De + Ef) \times ef,$$
$$s_5 = \tfrac{1}{2}\, Ef \times fH,$$
$$s_6 = \tfrac{1}{2}\, Id \times dH,$$
$$s_7 = \tfrac{1}{2}\,(Id + Jb) \times bd,$$
$$s_8 = \tfrac{1}{2}\, Jb \times Ab,$$

sumando miembro miembro

$$S = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6 + s_7 + s_8 =$$

$$=\tfrac{1}{2}[\mathrm{B}a(\mathrm{A}a+ac)+\mathrm{C}c(ac+ce)+\mathrm{D}e(ce+ef)+$$
$$+\mathrm{E}f(ef+f\mathrm{H})+\mathrm{I}d(\mathrm{H}d+db)+\mathrm{J}b(db+b\mathrm{A})]=$$
$$=\tfrac{1}{2}(\mathrm{B}a\times\mathrm{A}c+\mathrm{C}e\times ae+\mathrm{D}e\times cf+\mathrm{E}f\times e\mathrm{H}+$$
$$+\mathrm{I}d\times\mathrm{H}b+\mathrm{J}b\times d\mathrm{A}),$$

que expresa la superficie total del polígono.

Problemas numéricos.

1.º — Calcular, con un error menor que un centímetro cuadrado, el área de un rectángulo cuya base es igual á 10 m.75 y la diagonal á 15 m.25.

2.º — Calcular una de las alturas de un triángulo y su área, siendo sus lados respectivamente iguales á 1 m.20, 1 m.85 y 2 m.25.

3.º — Calcular una de las bases de un trapecio con un error menor que un centímetro cuadrado, dándose su área que es igual á 2034 m. c.60; su altura igual á 18 m.40 y la otra base igual á 54 m.48.

4.º — Calcular el área de un triángulo cuyos lados valen respectivamente 285 m, 308 m, 231 m.

5.º — Dándose la superficie de un rectángulo, igual á 23 m. c.85, y estando su base y altura en la relación de 5 á 3, calcular las dimensiones del rectángulo con un error menor que 0 m.001.

6.º — Hallar el área de un rombo cuyo lado es igual á su menor diagonal, sabiendo que la longitud de cada una de estas líneas, es igual á 20 m.55.

7.º — Calcular con un error menor que un centímetro, el lado del cuadrado equivalente al triángulo equilátero, cuya apotema tiene 2 m.20 de longitud.

8.º — Calcular el área de un trapecio, cuyos lados paralelos valen 5 m.17 y 3 m.121, y los otros dos lados, igualmente indicados sobre la base, valen, cada uno, 2 m.2.

Problemas gráficos.

1.º — El área de un trapecio es igual al producto de uno de los lados no paralelos por su distancia al punto medio del lado opuesto.

2.º — Por el vértice C de un triángulo A B C, trazar una recta M N, tal, que el trapecio que forme con el lado A B y las perpendiculares tiradas de los otros vértices A, B, sobre M N sea equivalente á un cuadrado dado.

3.º Si los ángulos A, A', de dos triángulos A B C, A' B' C', son iguales ó suplementarios, las áreas de estos triángulos son proporcionales á los productos A B $\times$ A C, A' B' $\times$ A' C', de los lados que los forman.

4.º — Transformar un triángulo rectángulo en un triángulo isósceles equivalente y que tenga con él un ángulo común. ¿Cuántas soluciones tendrá este problema?

5.º — Transformar un polígono regular en otro de doble número de lados y que le sea equivalente.

6.º — Dividir un triángulo en dos partes equivalentes, por medio de una perpendicular á uno de los lados.

7.º — Dividir un triángulo en dos partes equivalentes por medio de una paralela á una recta dada.

8.º — Trazar, por un vértice de un cuadrilátero una recta que divida su superficie, en dos partes equivalentes.

9.º — Si en un cuadrilátero cualquiera se trazan por el punto medio de cada diagonal una paralela á la otra, uniendo su punto de encuentro á los puntos medios de los lados del cuadrilátero, resultará este dividido en cuatro cuadriláteros equivalentes.

10. — Por un punto dado en el plano de un ángulo, trazar una transversal, de tal manera que el área del triángulo que forme con los lados del ángulo, sea igual á un cuadrado dado.

11. — Por un punto dado sobre el plano de un án-

gulo, trazar una transversal de tal manera, que el producto de las distancias del vértice del ángulo á los dos puntos de intersección, sea igual á un cuadrado dado.

Relaciones entre los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo.

El producto de los números que expresan las longitudes de dos líneas $a.b.$ tiene por expresión geométrica precisa, al área del rectángulo construido sobre estas dos líneas tomando á una de ellas por base, y á la otra por altura.

El cuadrado del número que expresa la longitud de una línea a tiene por expresión geométrica, el área del cuadrado formado tomando á esta línea por lado.

Según esto, podemos dar una significación geométrica á la fórmula

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

suponiendo que a, b y c expresen longitudes valuadas con la misma unidad

Teorema 109.

240) *El cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es equivalente á la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos.*

Sea ABC un triángulo rectángulo cuyos lados medidos con la misma unidad lineal de medida, dán

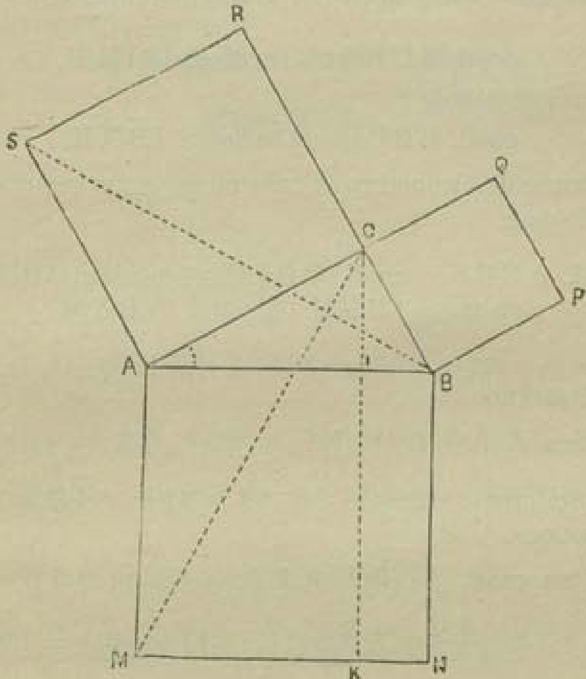
$$AB = a, \; BC = b, \; CA = c.$$

luego

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

Construyamos sobre los tres lados del triángulo, los tres cuadrados A B N M, C B P Q, C A S R y trazando

(Figura 218.)



zando la perpendicular C I K, sobre la hipotenusa A B, y las rectas C M, S B, probaremos que

$$\text{cuad. } ACRS \equiv \text{rectáng. } AIKM,$$
$$\text{cuad. } CBPQ \equiv \text{rectáng. } IBNK.$$

En efecto, la superficie del rectángulo A I K M es el doble de la del triángulo C A M, por tener la misma base A M y la misma altura A I; la del cuadrado A C R S, es el doble de la del triángulo A B S, por tener la misma base S A y la misma altura A C. Pero los triángulos C A M y A B S, son iguales entre sí, por tener $AB = AM$; $SA = AC$, y los ángulos comprendidos por estos lados, iguales á un recto más el ángulo A del triángulo, luego

$$\text{cuad. } ACRS \equiv \text{rectáng. } AIKM,$$

y análogamente

$$\text{cuad. } CBPQ \equiv \text{rectáng. } IBNK,$$

Sumando, miembro á miembro, estos resultados, tendremos

$$\text{cuad. } ACRS + \text{cuad. } CBPQ \equiv \text{rectáng. } AIKM + \text{rectáng. } IBNK \equiv \text{cuad. } ABNM.$$

L. Q. D. D.

Ejemplo

Sea $AB = 50^{m}$, $EC = 30^{m}$, $CA = 40^{m}$.

Facilmente veremos que $AI = 32^{m}$, é $IB = 18^{m}$. Entonces:

$$\text{área cuad. } ACRS = 2 \text{ área triáng } SAB =$$

$$= 2 \times AS \times \frac{AB}{2} = AS \times AC = 40^{m} \times 40^{m} = 1600^{mc};$$

$$\text{área rect. } AIKM = 2 \text{ área triáng. } ACM =$$

$$= 2 \times AM \times \frac{AI}{2} = AM \times AI = 50^{m} \times 32^{m} = 1600^{mc}.$$

Del mismo modo tendríamos:

$$\text{área cuad. } CBPQ = 30^{m} \times 30^{m} = 900^{mc},$$

$$\text{área rect. } IBNK = 50^{m} \times 18^{m} = 900^{mc},$$

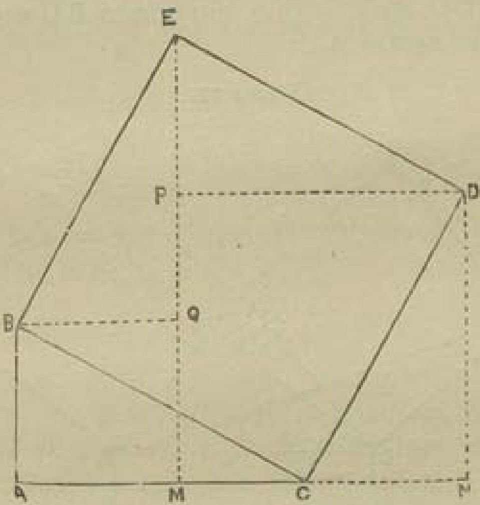
y luego,

área cuad. A C R S + área cuad. C B P Q = área rect. A I K M + área rect. I B N K = $1600^{mc} + 900^{mc} =$
$= 2500^{mc} = 50^{m} \times 50^{m} =$ área cuad. A B N M.

Observación.— Pueden darse otras demostraciones del teorema precedente. Daremos, en particular, la demostración siguiente:

Sea A B C el triángulo rectángulo dado, y B C D E

(Figura 219.)



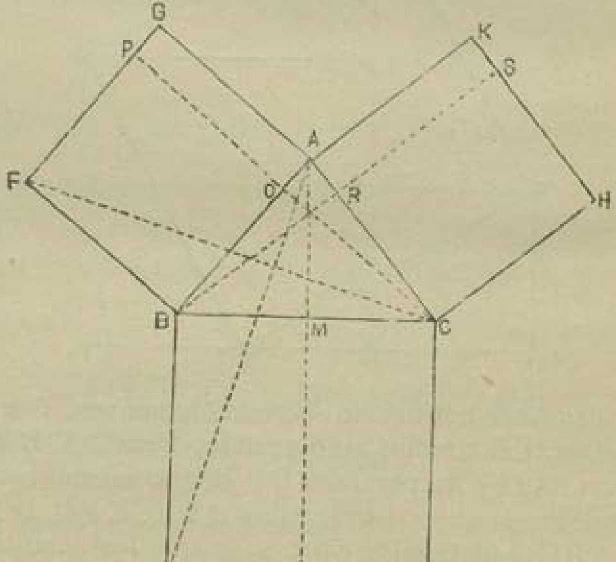
el cuadrado construido sobre la hipotenusa. Por los puntos D, E, tiremos las perpendiculares D N, E M, al cateto A C; y las paralelas D P, B Q, al mismo cateto. Fácil es ver que los triángulos B E Q, E P D, D N C y A B C son iguales entre sí, y que los cuadrados B Q M A, P D N M, tienen respectivamente por lados, los catetos del triángulo propuesto. Sentado esto, si al cuadrado B C D E, le quitamos los dos triángulos B Q E, E P D y los aplicamos sobre los B A C y C N D, formaremos los dos cuadros B Q M A y P D N M, lo que demuestra la proposición.

Teorema 110

241) *En todo triángulo, el cuadrado construido sobre un lado opuesto á un ángulo agudo, es equivalente á la suma de los cuadrados construidos sobre los otros dos lados, menos el doble del rectángulo formado por uno de estos y la proyección sobre él del otro lado.*

Sea A B C un triángulo, cuyo lado B C es opuesto al ángulo agudo A.

(Figura 220.)



Construyendo los cuadrados sobre los tres lados del triángulo; trazando las perpendiculares de los tres vértices sobre los lados opuestos, y las rectas F C y A E, veríamos, como en el caso anterior, que el rectángulo B E N M es equivalente al rectángulo B O P F; del mismo modo encontraríamos que el rectángulo M N D C es equivalente al C H S R, y que el rectángulo R S K A es equivalente al A G P O. Por consiguiente:

$$\text{cuad. } BCDE \equiv \text{rect. } BOPF + \text{rect. } CHSR$$

ó bién

$$\text{cuad. } BCDE \equiv \text{cuad. } ACHK + \text{cuad. } BAGF - 2 \text{ rect. } OAGP$$

que puede escribirse así:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BA}^2 - 2 \times BA \times OA$$

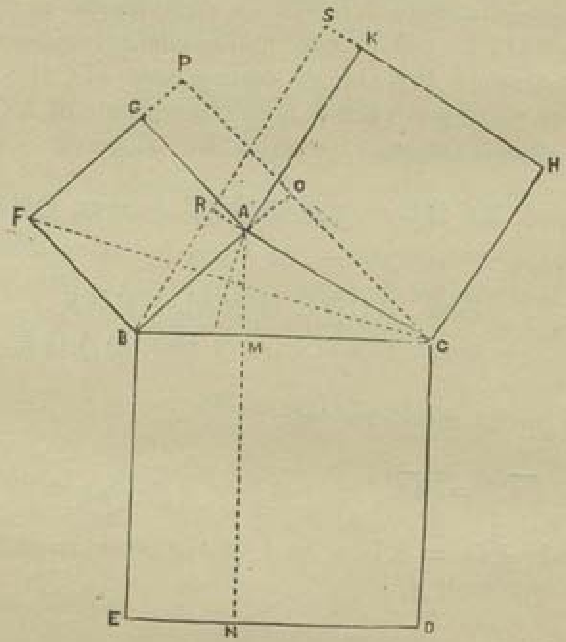
siendo A G = A B y O A la proyección del lado A C sobre B A.

Teorema 111.

242) *En todo triángulo, el cuadrado construido sobre un lado opuesto á un ángulo obtuso, es equivalente á la suma de los cuadrados construidos sobre los otros dos lados, más el duplo del rectángulo que tiene por dimensiones uno de los lados del ángulo obtuso, y la proyección del otro lado sobre él.*

Sea A B C el triángulo dado en el cual B C es el lado opuesto al ángulo obtuso B A C. Construyamos un cuadrado sobre cada uno de los lados del triángulo, y de los vértices, tiremos las perpendiculares AMN, COP, BRS, sobre los lados opuestos

(Figura 221.)



ó sus prolongaciones, formando los rectángulos

BMNE, MCDN, AKSR, OPGA, CHSR, BOPF.

Demostraremos fácilmente, como en los teoremas anteriores, la equivalencia de cada dos rectángulos consecutivos y colocados sobre los dos lados de un mismo ángulo ó sobre sus prolongaciones, por consecuencia

(1) rectáng. BMNE ≡ rectáng. BOPF ≡
cuad. BAGF + rectáng. AOPG,

(2) rectáng. MCDN ≡ rectáng. CHSR ≡
cuad. ACHK + rectáng. AKSR;

pero

$$({}^3)\ \text{rectáng. } AKSR \equiv \text{rectáng. } AOPG =$$
$$= AO \times AG = BA \times OA$$

y sumando las relacionos ([1]), ([2]), teniendo en cuenta la ([3]), resulta

$$\text{rectáng. } BMNE + \text{rectáng. } MCDN \equiv$$
$$\text{cuad. } BAGF + \text{cuad. } ACHK + 2\ \text{rectáng. } AOPG$$

ó lo que es lo mismo,

$$\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{BA}^2 + 2\,BA \times OA$$

siendo OA la proyección de AC sobre BA.

Observación.—Si a y b expresan longitudes valuadas en la misma unidad, las relaciones

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,ab,$$
$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab,$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2,$$

son susceptibles de una interpretación geométrica, dando origen á los tres teoremas siguientes:

1.° El cuadrado construido sobre la suma de dos líneas rectas dadas, es equivalente á la suma de los cuadrados construidos sobre estas rectas, más el duplo del rectángulo formado con ellas.

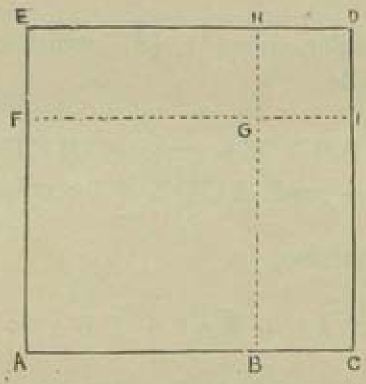
En efecto, sean

$$AB = a,\quad BC = b,\quad AC = a + b,$$

Construyendo el cuadrado ACDE; tomando

$AF = AB$ y trazando por los puntos B, F, perpendiculares á AC y á AE, tendremos:

(Figura 222.)



$$\text{cuad. } ACDE \equiv \text{cuad. } ABGF + \text{cuad. } GIDH + 2 \text{ rectáng. } BCIG$$

es decir,

$$\overline{AC}^2 = (AB + BC)^2 \equiv \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2AB \times BC$$

ó bién

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2a \cdot b$$

2.º *El cuadrado construido sobre la diferencia de dos líneas rectas dadas, es equivalente á la suma de los cuadrados de estas líneas, menos el duplo del rectángulo formado con ellas*

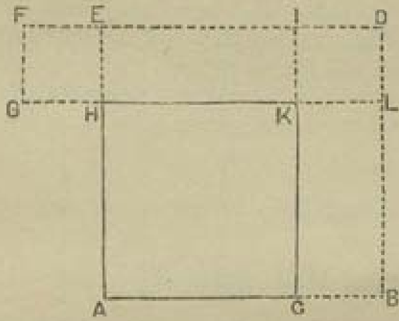
Sean las rectas

$$AB = a, \quad BC = b, \quad AC = a - b,$$

Construyamos el cuadrado $ABDE$; tomemos $AH = AC$; tracemos CI perpendicular sobre AB, HL paralela á AB y prolongando ED y HL, cada una de una longitud igual á BC, construyamos el cuadrado HEFG.

Tendremos que la figura total es la suma de los cuadrados construidos sobre AB y BC, y si le restamos los rectángulos CBDI, GKIF, quedará

(Figura 223.)



el cuadrado ACKH, construido sobre AC. Pero los dos rectángulos tienen sus dimensiones respectivas iguales á AB y BC, luego,

cuad. ACKH ≡ cuad. ABDE + cuad. HEFC − 2 rect. CBDI,

es decir

$$\overline{AC}^2 \equiv (AB - BC)^2 \equiv \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2AB \times BC$$

ó bién

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$

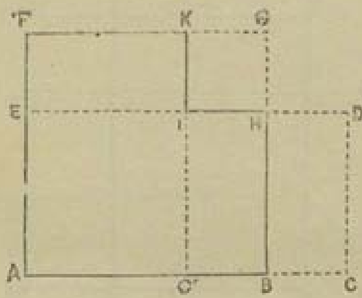
3.° El rectángulo construido sobre la suma y la diferencia de dos rectas dadas, es equivalente á la diferencia de los cuadrados construidos sobre estas rectas

Sean

$$AB = a, \quad BC = b,$$
$$AC = a + b, \quad AC' = a - b.$$

Construyamos el rectángulo ACDE, habiendo tomado AE = AC'; este rectángulo tendrá por base

(Figura 224.)



la suma AC de las dos líneas y por altura su diferencia AE: construyamos el cuadrado ABGF y tracemos C'K perpendicular á AC.

El rectángulo AEDC se compone de dos partes EABH, BHDC; el último es igual al rectángulo EFKI por tener bases y alturas iguales. Luego,

$$\text{rectáng. } ACDE \equiv ABHIKF \equiv \text{cuad. } ABGF -$$
$$- \text{cuad. } IHGK$$

es decir,

$$AC \times CD \equiv (AB + BC)(AB - BC) \equiv \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2$$

ó bién

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Problemas.

1.º—Demostrar que el cuadrado construido sobre la diagonal de un cuadrado es el doble del cuadrado propuesto.

2.º—Construir sobre una recta dada, un rectángulo equivalente á un rectángulo dado.

3.º—Construir un cuadrado equivalente á un paralelogramo ó á un triángulo dado.

4.º—Construir un cuadrado equivalente á la suma ó á la diferencia de dos cuadrados dados.

5.º—Construir un cuadrado equivalente á la suma de varios cuadrados.

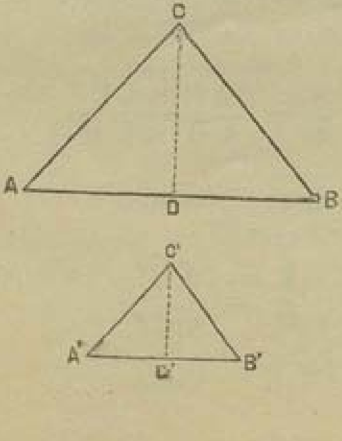
De las figuras semejantes.

Teorema 112.

243) *Las áreas de dos triángulos semejantes* A B C, A' B' C', *son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos.*

Siendo semajentes los triángulos A B C y A' B' C',

(Figura 225.)



sus bases A B, A' B', son proporcionales á dos lados homólogos, por consiguiente

$$(^1) \ldots\ldots \quad \frac{A\,B}{A'\,B'} = \frac{A\,C}{A'\,C'}.$$

De los vértices C, C', tiremos las perpendiculares C D, C' D', á las bases. Los triángulos A D C, A'D'C', dan

$$(^2) \quad \frac{C\,D}{C'\,D'} = \frac{A\,C}{A'\,C'};$$

y multiplicando miembro á miembro resulta

$$(^3) \quad \frac{A\,B \times C\,D}{A'\,B' \times C'\,D'} = \frac{\overline{A\,C}^2}{\overline{A'\,C'}^2}$$

Pero las áreas de los triángulos A B C, A' B' C', representándolas por S y S', son:

$$S = \tfrac{1}{2}\,A\,B \times C\,D,$$

$$S' = \tfrac{1}{2}\,A'\,B' \times C'\,D';$$

su razón es

$$\frac{S}{S'} = \frac{A\,B \times C\,D}{A'\,B' \times C'\,D'}$$

y comparando con la (³) resulta

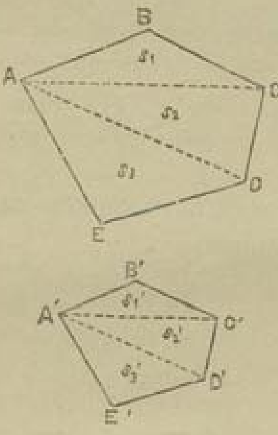
$$\frac{S}{S'} = \frac{\overline{A\,C}^2}{\overline{A'\,C'}^2}.$$

Teorema 113.

244) *Las áreas de dos polígonos semejantes* ABCDE, A'B'C'D'E', *son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos.*

Trazando las diagonales homólogas por los vértices A, A', tendremos descompuestos los dos polí-

(Figura 226.)



gonos en el mismo número de triángulos semejantes; y llamando s_1, s_2, s_3; s'_1 s'_2, s'_3 las áreas de estos triángulos tendremos (teor. ant.)

$$(^1) \qquad \frac{s_1}{s'_1} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{A'C'}^2} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2};$$

de la semejanza de los triángulos ABC, A'B'C', resulta también

$$(^2) \qquad \frac{s_2}{s'_2} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{A'C'}^2} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{C'D'}^2};$$

y comparando las (¹) y (²), resulta

$$\frac{s_1}{s'_1} = \frac{s_2}{s'_2}.$$

Del mismo modo demostraríamos que

$$\frac{s_2}{s'_2} = \frac{s_3}{s'_3}$$

y por consiguiente

$$(^3) \qquad \frac{s_1}{s'_1} = \frac{s_2}{s'_2} = \frac{s_3}{s'_3} = h,$$

siendo h el valor de la razón constante.

De la (³) sacamos

$$s_1 = h s'_1,$$
$$s_2 = h s'_2,$$
$$s_3 = h s'_3;$$

$\therefore$

$$\frac{s_1 + s_2 + s_3}{s'_1 + s'_2 + s'_3} = \frac{s_1}{s'_1} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2} = \text{etc} \ldots$$

Pero $s_1 + s_2 + s_3$, expresa el área S del polígono A B C D E; $s'_1 + s'_2 + s'_3$, expresa el área S' del polígono A' B' C' D' E', luego

$$\frac{S}{S'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2} = \text{etc} \ldots$$

qudando así, demostrado el teorema.

PROBLEMA I.

245) *Siendo dados dos polígonos semejantes, construir un tercero que les sea semejante y cuya área sea equivalente á la suma de las áreas de los dos primeros.*

Sean S y S' las áreas de los dos polígonos dados, y a, a', dos lados homólogos de estos polígonos; sea X el área del polígono buscado y x el lado de este, homólogo á los a, a',,

Como las áreas de los polígonos semejantes son proporcionales á los cuadrados de los lados homólogos, tendremos

$$\frac{X}{x^2} = \frac{S}{a^2} = \frac{S'}{a'^2}$$

de donde

$$\frac{X}{x^2} = \frac{S + S'}{a^2 + a'^2};$$

pero como debe ser $X = S + S'$, será

$$x^2 = a^2 + a'^2, \text{ ó } x = \sqrt{a^2 + a'^2}$$

y tomando este valor como lado homólogo de los a, a', construiremos sobre este un polígono semejante á los dados, que satisfará á las condiciones del problema.

PROBLEMA II.

246) *Construir un polígono semejante á un polígono dado y que sea á este, como una línea m, es á una línea n.*

Sea S el área del polígono dado; a, uno de sus lados; X el área del polígono buscado y x el lado de este polígono homólogo de a, tendremos

$$\frac{X}{S} = \frac{x^2}{a^2},$$

pero, por hipótesis

$$\frac{X}{S} = \frac{m}{n},$$

luego

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{m}{n},$$

de donde

$$x = a\sqrt{\frac{m}{n}},$$

y no habrá más que construir, con este valor de x, un polígono semejante al dado, para tener resuelto el problema.

PROBLEMA III.

247) *Construir un polígono semejante á un polígono dado y equivalente á otro polígano dado.*

Sean S y S', las áreas de los dos polígonos dados; X el área del polígono pedido que debe ser semejante al S, y equivalente al S'. Sea a uno de los lados del polígono S y x el lado del polígono X, homólogo de a.

Según el enunciado, tendremos

$$\frac{S}{X} = \frac{a^2}{x^2}, \text{ y } X = S',$$

de donde

$$\frac{S}{S'} = \frac{a^2}{x^2}.$$

Si construimos pues, los lados de los cuadrados equivalentes á los polígonos S y S', y llamamos m y n á estos lados, tendremos

$$\frac{m^2}{n^2} = \frac{a^2}{x^2} \text{ ó } \frac{m}{n} = \frac{a}{x}$$

y no habrá más que buscar una cuarta proporcional á las rectas m, n y a y construir sobre esta, como lado homólogo de a, un polígono semejante al polígono S para tener resuelto el problema.

Ejercicios.

1.º—Dividir un triángulo en un número cualquiera de partes equivalentes, por medio de paralelas á uno de sus lados.

2.º—Construir un triángulo equilátero equivalente á la suma ó á la diferencia de dos polígonos dados.

3.º—Construir sobre una base dada, un triángulo equivalente á un polígono dado, y tal que la recta que une su vértice al punto medio de la base sea media proporcional á los otros dos lados.

4.º—Dadas dos rectas paralelas y dos puntos, trazar por estos puntos dos rectas que se corten sobre una de las paralelas formando con la otra, un triángulo equivalente á un cuadrado dado.

5.º—Dividir un trapecio, en un número cualquiera de partes equivalentes, por medio de paralelas á sus bases.

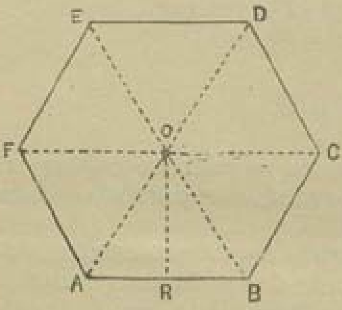
6.º—En un triángulo, trazar una paralela á uno de sus lados de manera que el área del trapecio, que así se forma, sea media proporcional entre las áreas de los dos triángulos.

Teorema 114.

248) *El área de un polígono regular convexo, es igual al producto de su perímetro por la mitad de su apotema.*

Sea, como ejemplo, el exágono regular ABCDEF; tracemos sus diagonales que lo dividirán en seis triángulos iguales AOB, BOC, COD,... y de su centro O, tiremos la perpendicular OR sobre el lado AB, la cual será á la vez la altura del triángulo AOB y la apotema del exágono.

(Figura 227.)



Sean S y P, la superficie y perímetro del polígono, y sea s, la superficie del triángulo AOB, tendremos

$$s = AB \times \frac{OR}{2},$$

$$S = 6.s = 6.AB \times \frac{OR}{2}$$

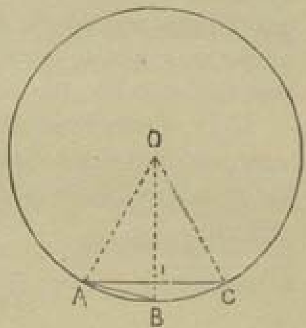
pero $6.AB = P$.

$$\therefore \quad S = P \times \frac{OR}{2}$$

L. Q. D. D.

249) OBSERVACIÓN.— Si se quiere valuar el área de un polígono regular en función del rádio del círculo circunscrito, es preferible el método siguiente:

(Figura 228.)



Sea A B el lado de un polígono regular de $2n$ lados y R el radio del círculo circunscrito. La superficie de uno de estos triángulos A O B será

$$BO \times \frac{AI}{2} = R \times \frac{AI}{2};$$

pero A I no es otra cosa, que la mitad del lado del polígono regular inscrito de n lados. Si este lado fuera conocido en función del rádio, el área del triángulo sería también conocida y multiplicándola por $2n$, tendríamos la del polígono. Por ejemplo, supongamos que A B sea el lado del dodecágono regular, B I será entonces la mitad del lado del exágono, y se tendrá

$$S = 12.OB \times \frac{AI}{2} = 12.R\,\frac{R}{4} = 3R^2,$$

luego; la superficie del dodecágono, es equivalente al triplo del cuadrado del radio del círculo circunscrito.

250) COROLARIO. — *La razón de las áreas de dos polígonos regulares del mismo número de lados, es la misma que la de los cuadrados de sus radios y de sus apotemas, etc.*

Siendo los polígonos regulares y del mismo número de lados, son semejantes y sus superficies son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos ó de su perímetros; pero los perímetros son proporcionales á los radios y apotemas de los dos polígonos regulares; luego las superficies de estos polígonos serán proporcionales á los cuadrados de sus radios ó de sus apotemas.

251) Observación.— *El área de un polígono cualquiera circunscrito á un círculo, es igual al producto de su perímetro por la mitad del radio del círculo inscrito.*

Teorema 115.

252) *El área de un círculo, es igual al producto de la longitud de su circunferencia por la mitad de su radio.*

En efecto, inscribamos en un círculo un polígono regular convexo, por ejemplo, un exágono; inscribamos luego, los polígonos regulares convexos, de 12, 24 y 48 etc... lados. El área de cada uno de estos polígonos, según el teorema anterior, es igual al producto de su perímetro por la mitad de su apotema. Pero, como esta regla es independiente del número y de la longitud de los lados del polígono será aplicable al círculo que es el límite de las superficies de estos polígonos; por consiguiente, el área del círculo es igual al producto de su circunferencia por la mitad de su apotema, que no es otra cosa que la mitad de su radio.

Corolario.—Siendo R el radio del círculo dado tendremos

$$\text{ci.culo } R = \text{circunf. } R \times \frac{R}{2}$$

y remplazando en esta, circunf. R por su valor $2\pi R$, resulta

$$\text{círculo } R = 2\pi R \times \frac{R}{2} = \pi R^2.$$

De esta fórmula resulta:

1.º—*Para calcular el área de un círculo cuyo radio es dado, basta multiplicar el cuadrado de este radio por la razón constante*

$$\pi = 3.1\,4\,1\,5\,9\,2\ldots\ldots$$

de la circunferencia al diámetro.

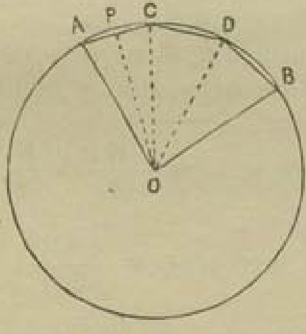
2.º—*Para obtener el radio de un círculo cuya área es dada, bastará dividir esta área por π, y extraer la raiz cuadrada del cociente.*

Teorema 116.

253) *El área de un sector, es igual al producto de la longitud de su arco por la mitad del radio.*

Para valuar el área del sector A O B, inscribamos

(Figura 229.)



en el arco A B, una serie de cuerdas iguales, A C. C D, D B, y tracemos los radio O C, O D.

La figura O A C D B, que se llama *sector poligonal*, resulta dividida en triángulos isósceles iguales, cuyas áreas sumadas, darán el área del sector poligonal. Así

$$\text{área triáng. } A\,O\,C = A\,C \times \frac{O\,P}{2},$$

$$\text{» » } C\,O\,D = C\,D \times \frac{O\,P}{2},$$

$$\text{» » } D\,O\,B = D\,B \times \frac{O\,P}{2},$$

$$\text{área sect. políg. } O\,A\,C\,D\,B = (A\,C + C\,D + D\,C) \times$$
$$\times \frac{O\,P}{2} = \text{quebrada } A\,C\,D\,B \times \frac{O\,P}{2}.$$

Ahora, si aumentamos indefinidamente al número de lados de la línea quebrada A C D B, esta tenderá hácia el arco A B; al mismo tiempo, al área del sector poligonal O A C D B, tiende hácia el área del sector circular y la apotema O P, al radio O A. Resulta pués, que el área del sector circular tiene por medida la longitud del arco A B, multipticada por la mitad de su radio.

Representando con n, el número de grados y subdivisiones del arco del sector y con R su radio, se tiene

$$\text{área sect.} = \frac{\pi R n}{180} \times \frac{R}{2},$$

ó bién

$$\text{área sect.} = \frac{n \pi R^2}{360}.$$

Ejemplo.—Calcular, con un error menor que un kilómetro cuadrado, el área de un sector de 23° 27′

en el círculo cuya circunferencia tiene 40,000 kilómetros de longitud.

Para resolver esta cuestión, sustituiremos en la fórmula

$$\text{área sect.} = \frac{n \cdot \pi R^2}{360},$$

$$n = 23^\circ\ 27' = 23.45,$$

$$R = \frac{40.000}{2\pi},$$

y tendremos

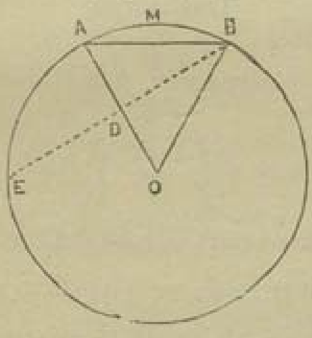
$$\text{área sect.} = \frac{(40000)^2 \times 23.45}{4\pi \times 360},$$

que nos dará, una vez efectuadas las operaciones indicadas, 8293741 kilóm. cuad.

254) Corolario.—*El área de un segmento de círculo es igual á la diferencia entre el área del sector circular y el área del triángulo que tiene por base, la cuerda del arco del sector.*

Así el área del segmento A M B, es la diferencia

(Figura 230.)



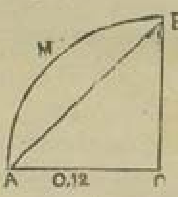
entre el área del sector O A M B y el área del triángulo O A B. No habrá más que calcular estas áreas y formar la diferencia, para tener el área del segmento A M B.

255) OBSERVACIÓN.—El área del triángulo A O B puede valuarse tomando por base á la cuerda A B, pero también podría calcularse tomando por base á uno de los lados O A, O B. En este último caso, la altura B D del triángulo, no es otra cosa que la mitad de la cuerda del arco doble de A B.

Se observará pués, que el área del triángulo y por consiguiente la del segmento, no podrán calcularse geométricamente sino en el caso en que las cuerdas A B ó B E, sean uno de los lados de los polígonos regulares que hemos aprendido á inscribir en un círculo y cuyos lados han sido calculados en función del radio del círculo. Así, se podrá calcular el área de un segmento cuyo arco valga 30°, 60°, 120°, . . . En los demás casos será necesario recurrir á la *Trigonometría* para resolver la cuestión.

EJEMPLO.— *Calcular, con un error menor que un centímetro cuadrado, el área de un segmento de 90°, en un círculo cuyo radio tiene 0 m.12 de longitud.*

(Figura 231.)



Tendremos:

$$\text{área sect. A M B O} = \frac{90 \times \pi (0.12)^2}{360}$$

$$= \frac{\pi}{4}(0.12)^2 = \pi \left(\frac{0.12}{2}\right)^2 = \pi \times (0.06)^2;$$

$$\text{área triáng. A B O} = 0.12 \times 0.06$$

$$\text{área seg. A M B} = [\pi \times 0.06 - 0.12] \times 0.06 =$$

$$= [\pi - 2]\,(0.06)^2 = 0.0041,$$

y el área del segmento es igual á 41 centím. cuad.

Teorema 117.

256)—*Las áreas de dos círculos, son proporcionales á los cuadrados de los radios.*

En efecto, sean S, S', las áreas de dos círculos de radios R, R', tenemos,

$$S = \pi R^2,$$

$$S' = \pi R'^2,$$

y luego,

$$\frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2}$$

257) Corolario I.—*Las áreas de dos sectores semejantes* (terminadas por arcos semejantes) *son proporcionales á los cuadrados de sus radios.*

Sean S, S', las áreas de estos sectores; R, R', sus radios, y n al número de grados de sus arcos, tendremos:

$$S = \frac{n \,.\, \pi R^2}{360},$$

$$S' = \frac{n \,.\, \pi R'^2}{360},$$

$$\therefore \quad \frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

258) Corolario II.—*Las áreas de dos segmentos semejantes, son proporcionales á los cuadrados de sus radios.*

En efecto, el sector y el triángulo cuya diferencia es igual á uno de los segmentos, son respectivamente semejantes al sector y el triángulo que forma al otro segmento.

Problemas numéricos.

1.—Sabiendo que los lados de tres pentágonos regulares valen respectivamente 5^m, 7^m, 13^m; calcular el lado de un cuarto pentágono regular cuya superficie sea igual á la suma de las superficies de los tres primeros.

2.º—Calcular en hectáreas, la superficie de un exágono regular cuyo lado vale 235^m.

3.º—Siendo la superficie de un exágono regular 34 áreas 19: calcular su lado con un error menor que un milímetro.

4.º—Calcular la superficie de un triángulo equilátero, sabiendo que el radio del círculo inscrito vale $142^m.25$.

5.º—Valuar el lado y la superficie de un octógono regular inscrito en un círculo de radio igual á 10 .

6.º—Teniendo un exágono regular cuyo perímetro vale 10 metros; calcular el área del círculo inscrito con un error menor que un centímetro cuadrado.

7.º—Calcular las áreas de los círculos inscrito y circunscrito á un triángulo equilátero cuyo lado vale 6 metros.

8º—Calcular el área de un círculo, sabiendo que las cuerdas trazadas de un punto de la circunferencia á los extremos de un diámetro valen $4^m.19$ y 3 .25.

9.º—Calcular, con un error menor que un centímetro cuadrado, el área de un sector de $50^\circ 50' 42''$ que forma parte de un círculo de $1^m.92$ de diámetro.

10—Encontrar, con un error menor que un segundo, la graduación del arco de un sector cuya superficie vale un decímetro cuadrado y que pertenece á un círculo de $0^m.5$ de radio.

11.—Calcular, con un error menor que $0^m.001$, el radio de un círculo en el cual el arco de un sector que tiene $0^{mc}.64$ de superficie, tiene $0^m.45$ de longitud.

12.—Calcular, con un error menor que un decímetro cuadrado, el área de un segmento de círculo cuyo arco es de 300° y cuyo radio vale 1 metro.

13.—Calcular en hectáreas, el área de un segmento comprendido entre un arco de 90° y su cuerda, en un círculo de 728 metros de radio.

14.—Valuar la razón de las superficies de dos segmentos en los cuales resulta dividido un círculo por una cuerda igual á su radio.

15.—Tomando, sobre un círculo, un arca de 30°, y formando el sector y el segmento correspondientes; calcular el radio del círculo sabiendo que el área del triángulo excede á la del segmento en 2 metros cuadrados.

16. —Encontrar la razón de las superficies, de un triángulo equilátero, de un cuadrado y de un círculo, sabiendo que el perímetro de cada una de estas figuras equivale á 4 metros.

17.—Teniendo una corona circular comprendida entre dos circunferencias concéntricas; siendo 4 metros cuadrados, el área de esta corona y $3^{m}.1416$ la suma de los radios de los dos círculos; calcular la longitud de cada uno de los radios.

18. Calcular, con un error menor que $0^{m}.001$, el radio de un círculo, sabiendo que si se aumentara este de $0^{m}.01$, el área del círculo aumentaría de un metro cuadrado.

19. -Siendo un triángulo equilátero inscrito en un círculo y la suma de las áreas de las dos figuras igual á 3 metros cuadrados; calcular el área de cada uno de ellos.

20.—Calcular el radio de un círculo, sabiendo que la diferencia de las áreas del exágono regular y del cuadrado inscritos, es igual á un metro cuadrado.

21.—Calcular, con un error menor que $0^{m}.001$, el radio de un círculo, sabiendo que la superficie de este círculo, excede á la del exágono regular inscrito en $62^{mc}.25$.

22.—Calcular con un error menor que $0^{m}.001$, el radio de un círculo, sabiendo que la diferencia de las áreas del octógono y exágono regular inscritos, es igual á un metro cuadrado.

Problemas gráficos.

1.º — Se dá un exágono regular cuyos vértices se unen dos á dos entre sí: demostrar que el exágono interior al primero, así formado, es un exágono regular y tiene una superficie igual al tercio de la del primero.

2.º — Demostrar que si se circunscriben polígonos á una misma circunferencia, las superficies de estos polígonos estan entre sí como sus perímetros.

3.º — Dividir un círculo en dos partes equivalentes por medio de un círculo concéntrico.

4.º — Siendo R el radio de un círculo dado, si se le circunscribe al círculo un triángulo equilátero A B C, y se le traza una tangente D E, paralela al lado B C; se pide hallar el área del trapecio B C D E.

5.º — Valuar la razón del área del triángulo equilátero á la del círculo circunscrito.

6.º — Construir un exágono regular equivalente á un cuadrado dado.

7.º — Calcular la porción del área de un círculo comprendido entre dos cuerdas paralelas, una igual al lado del exagono regular, y la otra igual al lado del triángulo equilátero inscritos en el círculo.

8.º — Dándose un sector circular A O B, describir del punto O, como centro un arco A' B', de tal manera que el área del sector A' O B, sea la quinta parte del área del sector A O B.

9.º — Siendo dado un exágono regular A B C D E F, y uniendo los vértices, de dos en dos, por las diagonales A B, B D, C E, D F, E A, F B, se propone: 1.º demostrar que el polígono *a b c d e f*, formado por las intersecciones de las diagonales consecutivas, es regular; 2.º encontrar la razón de la superficie de este polígono á la del exágono dado.

10. — Si con los catetos de un triángulo rectángulo, tomados como diámetros, se describen dos semi-circunferencias que sean exteriores al triángulo, cada una de estas curvas, forma con la circunferen

cia que pasa por los tres vértices del triángulo, una figura que se llama *lúnula* de Hipócrates: demostrar que la suma de las superficies de las dos lúnulas, es equivalente á la superficie del triángulo rectángulo.

11. — Describir un círculo que toque interiormente á un círculo dado y divida á su superficie en dos partes proporcionales á líneas dadas.

12. — La superficie comprendida entre dos circunferencias concéntricas, es equivalente al círculo que tiene por diámetro una cuerda de la circunferencia exterior, tangente á la circunferencia interior.

ÍNDICE

GEOMETRÍA ELEMENTAL

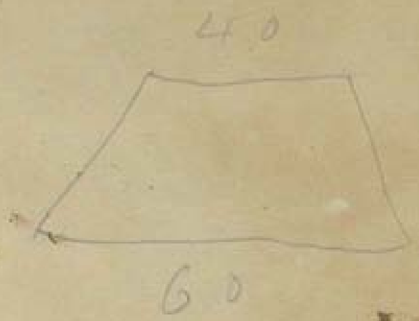
GEOMETRÍA PLANA

Libro Primero

Libro Segundo.

Libro Tercero.

Libro Cuarto


40
60


40
60


60
10

PUBLICACIONES DE LA CASA

El Nene.—Método ecléctico de lectura y escritura de palabras generadoras, por el profesor normal D. Andrés Ferreira, Inspector General de Instrucción Primaria; texto aprobado por el Consejo Nacional de Educación.

El Nene.—Libro segundo, por los profesores normales D. Andrés Ferreira y José M. Aubín.

El Nene.—Libro tercero, por los profesores normales D. Andrés Ferreira y José M. Aubín.

Lecturas sobre Historia Nacional.—Por D. José M. Aubín. Para los alumnos de segundo grado de las Escuelas Comunes. Un tomo con ilustraciones.

Lecturas Geográficas é Históricas.—Por D. José M. Aubín. Para los alumnos de las Escuelas Comunes. Un tomo con ilustraciones.

Ciencias Físico-Naturales (Curso gradual de)—Por D. Carlos M. Biedma. De acuerdo con el programa de las Escuelas Comunes. Un tomo para tercer grado, un tomo para cuarto y uno para quinto grado.

Historia Nacional (Curso de)—Escrito con arreglo al nuevo programa de las Escuelas Comunes de la Capital, por D. José M. Aubín. Un tomo para tercer grado, uno para cuarto y uno para quinto y sexto grado.

Historia General.—Por D. José M. Aubín. De acuerdo con el nuevo programa de las Escuelas Comunes de la Capital. Un tomo para tercer grado, uno para cuarto y uno para quinto y sexto grado.

El Polígrafo Argentino.—Mosaico de lectura por los profesores normales D. Andrés Ferreira y D. Teodoro Suárez. Un tomo.

ANGEL ESTRADA y Cía.

CALLE BOLÍVAR 466—BUENOS AIRES